Planning leçons / textes

Gral Analyse :

EDP linéaire : Elhoucine

$u_{n+1} = f(u_n)$: 05/05 Meryeme

Sys lin., Vp : Marouane

Séries de Fourier : 05/05 Mohamed

Transformation Fourier : 12/05 Karam

Gral Calcul scientifique :

* leçons Calcul scientifique :

Calcul numérique :

Systemes linéaires : 12/05 Imad

Systemes non linéaires :

EDO : Anas

* Texte

Dirichlet : Yassine

Séance 24 : décomposition SVD d'une matrice et applications

* **Supports utilisés :**
  - → texte 1 : requête bibliographique
  - → texte 2 : traitement d'images

I) Modélisations

→ Exemple 1 : obtenir une réponse pertinente à une requête bibliographique par mots clés

Exemple (texte 1) :

N_d documents → mots clés ($N_d = 12$)

N_t mots clés ($N_t = 20$)

Requête : $q \in \{0,1\}^{N_t}$ → classement des documents par pertinence % à q

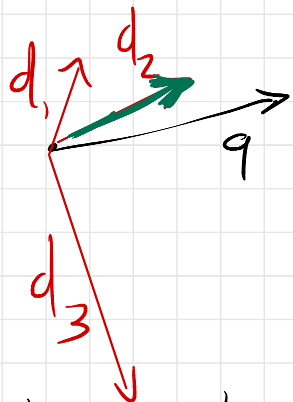
En pratique, N_t et/ou N_d sont très grands.

Le modèle espace-vectoriel consiste à construire la matrice

$$\underline{D} = \begin{array}{cc} & d_j \\ N_t \updownarrow \; i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 0 \text{ ou } 1 & \\ & \vdots & \end{pmatrix} \\ & \xleftrightarrow{\quad N_d \quad} \end{array}$$

Pour chaque $j \in \{1, \dots N_d\}$, on calcule le score

$$s_j(q) = \frac{\langle q, d_j \rangle}{\|q\| \cdot \|d_j\|} \quad (\in [0,1])$$



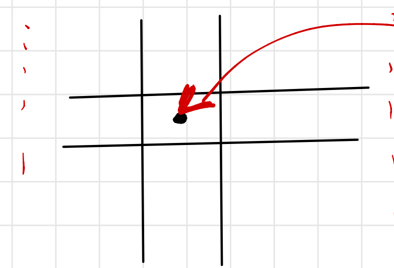
Cette méthode est coûteuse et présente des difficultés pour gérer les 3 aspects suivants : redondance, synonymie et la polysémie.

Sans justification précise, on va utiliser une décomposition SVD de D pour remédier à ces difficultés.

→ Exemple 2 : compression et traitement d'images (texte 2)

Image ≡ matrice (de 512×512 pixels par exemple)

M ≡



couleur (niveaux de gris) $\in [0, 255]$

le stockage complet de M nécessite :

$$(512)^2 \times 8 \simeq 2{,}36\,10^6 \text{ bit}$$

En utilisant une décomposition SVD du type :

$$M = \underbrace{U}_{O_n(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{V_t}_{O_n(\mathbb{R})}$$

avec $d_{11} \geqslant d_{22} \dots \geq d_{nn} \geq 0$

et en tronquant à 0, par exemple la moitié des coefficients, on construit

$$M' = U \begin{pmatrix} d_{11} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & d_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} V$$

qu'il est possible de stocker sur :

$$4 \times (256)^2 + 256 \simeq 2{,}62\,10^5$$

(10 fois moindre, à vérifier...)

II | Étude mathématique de la décomposition SVD

Les deux modélisations précédentes sont basées sur le théorème suivant :

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $r \leq \min(n,p)$.

Il existe un triplet (avec D unique) (U, D, V) tel que

$$\boxed{A = U D\, {}^tV}$$

où $U \in O_n(\mathbb{R})$, $V \in O_p(\mathbb{R})$ et

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (n \times p)$$

avec

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

On parle de la décomposition SVD (ou en valeurs singulières) de A.

Les valeurs $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, appelées valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de $A\,{}^tA$ (ou ${}^tAA$).

preuve : voir texte 2 (sujet CPGE, CCP, 2001, option PC).

I.1) trivial

$${}^tAA = 0 \iff A = 0$$

$$({}^tAA)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k})^2 \dots$$

$$X \in \mathbb{R}^n \to {}^tAAX = 0$$

puis ${}^tX\,{}^tAAX = \|AX\|^2 = 0 \Rightarrow AX = 0$

I 1 b)

$${}^tAAW = \lambda W$$

$$\underbrace{\|AW\|_n^2}_{\geqslant 0} = {}^tW\,{}^tAAW = \lambda \underbrace{\|W\|_p^2}_{>0}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \geqslant 0$$

I 4 b)

En égalant les déterminants on a

$$\det(A\,{}^tA - xI_n) = \det(B)\,(-1)^n$$

et

$$(-x)^n \det({}^tAA - xI_p) = \det(B)$$

$$(-1)^n x^p$$

$$\Longrightarrow \quad \chi_{A\,{}^tA}(x) = (-1)^n x^{n-p}\,\chi_{{}^tAA}(x)$$

($\det B \neq 0$)

On en déduit que les valeurs propres non nulles de $A\,{}^tA$ et ${}^tAA$ sont identiques et ont le même ordre de multiplicité.

$(V_1, \dots, V_r, \dots, V_p)$: famille de vecteurs propres de ${}^tAA \in S_p(\mathbb{R})$.

et

$(U_1, \dots, U_r)$: famille de vecteurs propres de $A\,{}^tA \in S_n(\mathbb{R})$.

(et $U_i = \frac{1}{\mu_i} AV_i$, $1 \leq i \leq r$)

I 7.)

On a $\underbrace{{}^tUAV}$ $= D$

$$\begin{pmatrix} {}^tU_1 \\ \vdots \\ {}^tU_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underbrace{AV_1}_{\mu_i U_i} & \cdots & AV_p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{r_0} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{D}$$

(car ${}^tU_iU_j = \delta_{ij}$)

On a bien

$A = UD\,{}^tV$ avec les propriétés annoncées sur U, V et D

→ Exemple :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^tA_0 A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

→ $\lambda_2 = 2$, $\lambda_1 = 6$ $\left(\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = \sqrt{6} \\ \mu_2 = \sqrt{2} \end{cases}\right)$

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis

$$U_1 = \frac{1}{\mu_1} A_0 V_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

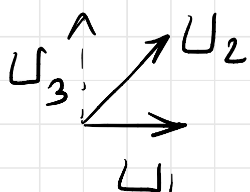
$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{\mu_2} A_0 V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_3 = U_1 \wedge U_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$(\in \mathrm{Ker}(A_0{}^{t}A_0))$



$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

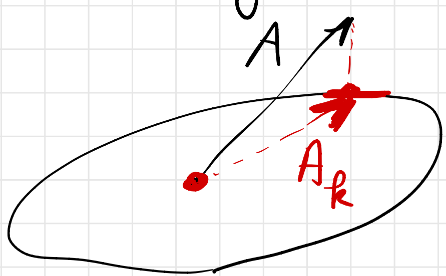
(unicité de D)

La décomposition SVD permet de déterminer facilement la matrice la plus proche de A et de rang $k < r$:

$$A_k = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_k & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}^{\sigma_r} V$$

est telle que

$$|||A - A_k|||_2 = \min_{rg(B) = k} |||A - B|||_2$$



III) Implémentation numérique de la méthode SVD

(Texte 1)

Un algorithme est proposé et réalisé en 2 étapes (si $n \geq p$)

→ transformation de A en une matrice B bidiagonale

→ décomposition SVD de B par factorisations QR successives de matrices B_k (non carrées)

→ Dans Scilab / Python, il existe aussi une instruction préprogrammée

Autre possibilité : utiliser la méthode de Jacobi pour rechercher valeurs propres et vecteurs propres des matrices symétriques A^tA et ${}^tAA$ (SVD en Scilab)

Remarque : $\mathrm{cond}(A) = \sigma_1 / \sigma_r$.

IV) Applications en modélisation

Texte 1 : exemple des 3 requêtes sur l'exemple $D \in \mathcal{M}_{12,20}(\mathbb{R})$

Texte 2 : compression d'une image

Image initiale (jpg) $\longrightarrow M \in \mathcal{M}_{512}([\![0,255]\!])$

SVD

$M = U\Sigma V$

Image compressée $\longleftarrow M' = U\underbrace{\tilde{\Sigma}}V$

troncature à 0 des petites valeurs singulières