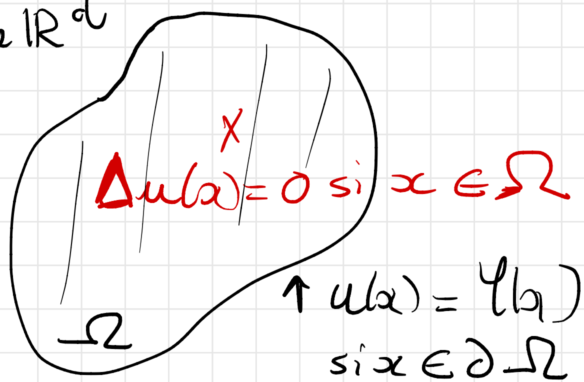
# Texte modélisation : le problème de Dirichlet

## I) Présentation du problème

$\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^d$




$\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$

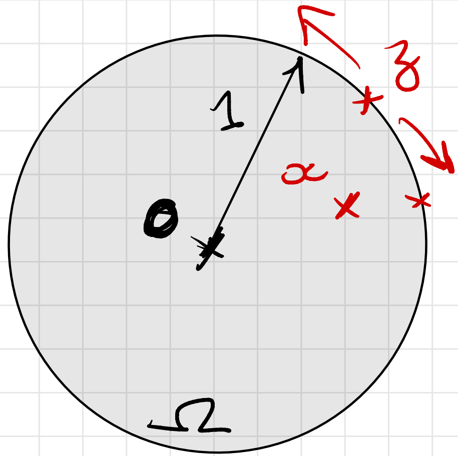
## II) Étude mathématique

On s'intéresse au problème de la recherche de solutions $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(1) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ si } x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega}(x) = \varphi(x) \text{ si } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

On montre l'existence et l'unicité de $u$ solution de (1) sous certaines conditions sur $\Omega$.

Par exemple, on s'intéresse au cas où $\Omega = D(0,1)$ :




* La fonction

$$\tilde{u}(x) = \int_{\partial B(0,1)} \varphi(z) \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^2} m(dz)$$

est solution du problème (1)
(voir texte CPGE par étapes
de la démonstration)

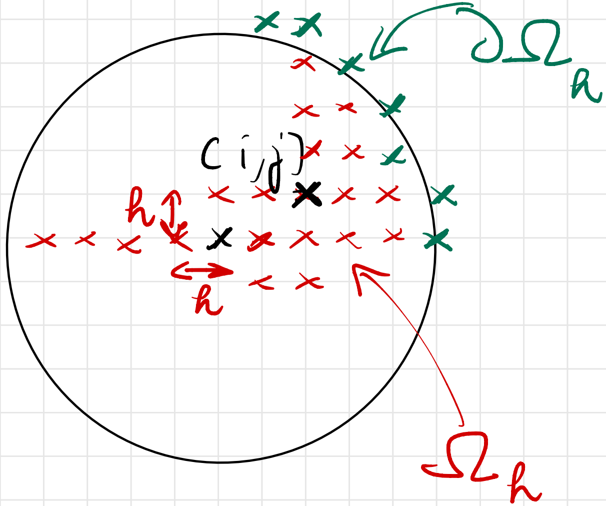
* L'unicité de la solution de (1) découle d'un principe du maximum.

2

## III) Approximation numérique de la solution de (1)

Deux méthodes sont présentées

$\longrightarrow$ une méthode de type différences finies :
on discrétise l'opérateur Laplacien sur un grille discrète.




On résout un système du type :

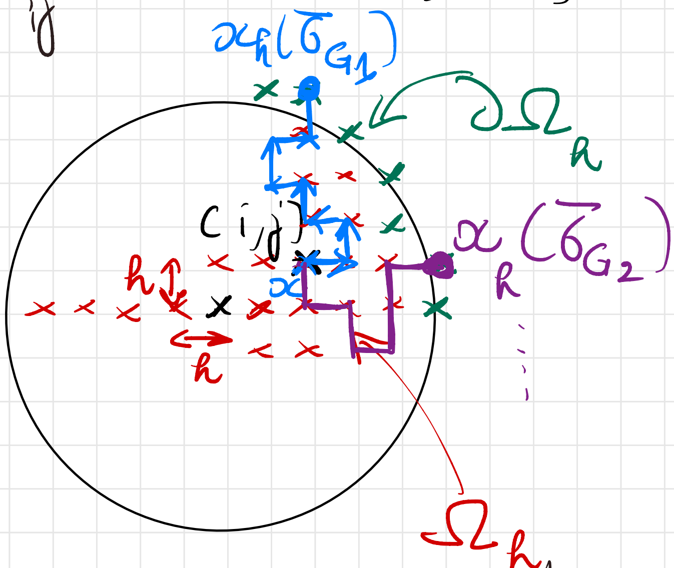
$$\begin{pmatrix} -4 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = b$$

$$\Delta_h u(x_i,y_j) \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i,y_j) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_i,y_j)$$

$$= \frac{u(x_{i+1},y_j)+u(x_{i-1},y_j)+u(x_i,y_{j-1})+u(x_i,y_{j+1})-4u(x_i,y_j)}{h^2}$$

→ avec une marche aléatoire :

$$u(x_{ij}) = E(\varphi(x_h(\tau_G)))$$




Avec la loi faible des grands nombres,

on approche :

$$u(x_{ij}) \approx \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} \varphi(x_h(\tau_{G_i}))$$

→ Implémentation de la marche aléatoire : Python / Scilab