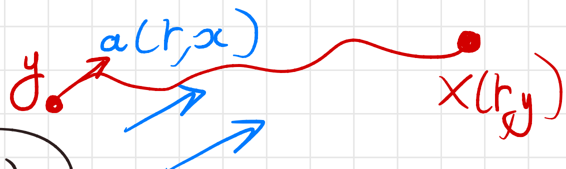
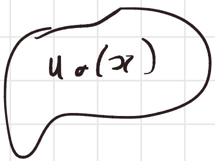
Séance 28 : exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires

Exemple 1 : équation de transport

* Contexte :





(transport d'un nuage de polluant)

* EDP :

$$(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) + a(t,x) \dfrac{\partial}{\partial x} u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

* Méthode des caractéristiques :

on se ramène à la recherche de $X : (\mathbb{R}_+) \times (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} X'(t,y) = a(t, X(t,y)) \\ X(0,y) = y \end{cases}$$

(EDO paramétrique)

Th : le Problème (1) admet une unique solution donnée par

$$u(t,x) = u_0(X_t^{-1}(x))$$

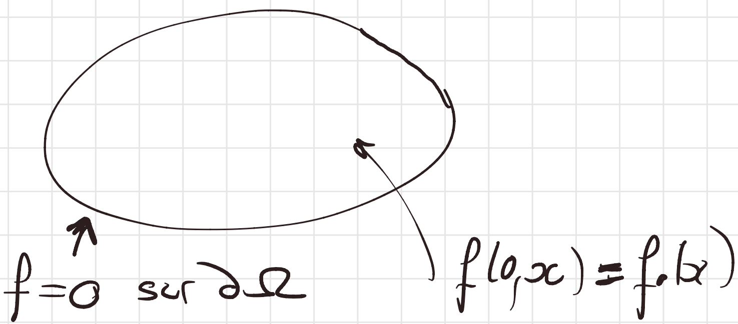
où $X_t : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto X(t,y) \end{pmatrix}$

(on suppose $u_0 \in C(\mathbb{R})$ et $a \in C_b^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$)

* Référence : Godlewski, Raviart, "systèmes hyperboliques"

Exemple 2 : équation de la chaleur

*



à l'instant t : $f(t,x)$ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) - \Delta f(t,x) = 0 \\ f(0,x) = f_0(x) \\ f_{/\partial\Omega}(t,x) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

* Cas particuliers :

→ $\Omega =]0,L[$ ↝

* solutions sous forme de séries de Fourier :

si $f_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ alors

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} t\right)}$$

$(f_0 \; C^0 \Rightarrow f \; C^\infty$ sur $]0,+\infty[\times \Omega)$

\+ principe du maximum

→ $\Omega = \mathbb{R}$

* solutions données grâce à la

Transformation de Fourier :

Th : si $f_0 \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors le problème (2) admet une unique solution :

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) f_0(y)\, dy$$

(+ principe du maximum)

* Référence : Schatzmann (à vérifier)

Exemple 3 : l'équation des ondes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 & (t,x) \in [0,T] \times \Omega \\ f(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ f(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(0,x) = u_1(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

* Cas particulier : $\Omega = \mathbb{R}$;

existence et unicité de la solution :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\, ds$$