

Séance 10 : résolution numérique
d'équations différentielles : notions de
consistance, stabilité, convergence, ordre
(2/3)

1) Rappel des notations

* Problème à résoudre de Cauchy :

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T] \\ y(0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

où la fonction $f: [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
est continue, et globalement Lipschitzienne

par rapport à y :

$$\forall (t, y_1, y_2) \in [0, T] \times (\mathbb{R}^m)^2,$$

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq L \|y_2 - y_1\|$$

→ existence et unicité de
 $y \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^m)$.

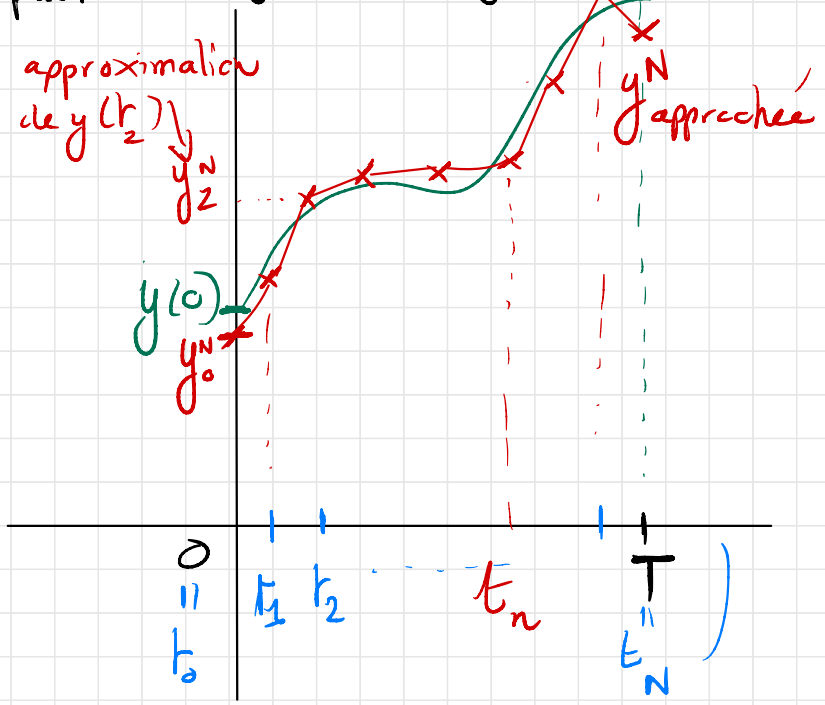
* Schéma numérique à un pas :

$$(2) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) \Phi(t_n, y_n, t_{n+1} - t_n) \\ y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases} \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

où $\Phi: [0, T] \times \mathbb{R}^m \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$
et y_n désigne une approximation
de $y(t_n)$.

cas
(Euler: $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$)
expliate

approximation
de $y(t_2)$



L'objectif est de définir un schéma
convergent (au sens où $y^N \rightarrow y$,

déjà vu par la méthode d'Euler) / 2
précis et stable.

On définit par cela 4 propriétés par
un schéma numérique afin de vérifier
la réalisation des ces objectifs:

- * consistance \rightarrow prérequis du schéma
- * stabilité \rightarrow effet des perturbations
- * convergence \rightarrow (notion déjà vue)
- * ordre \rightarrow vitesse de convergence

2) Consistance, stabilité, convergence et ordre : définitions

* Def 1 : on appelle erreur de consistance de la méthode (2), la quantité :

$$E_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T \phi(t_n, y(t_n), \Delta T)$$

où y est une solution de (1) (à $y(0)$ donné et par une subdivision régulière).

(il s'agit de l'erreur du schéma (2) quand on "injecte" la solution exacte).

on dit que le schéma (2) est consistant si

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} |E_n| = 0$$

3

* Def 2 soit le schéma perturbé :

$$\left. \begin{array}{l} z_{n+1} = z_n + \Delta T \phi(t_n, z_n, \Delta T) + \varepsilon_n \\ z_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{array} \right\} \text{ (2')} \quad \begin{array}{l} \text{perturbation} \end{array}$$

où $(\varepsilon_n)_{0 \leq n \leq N-1} \in \mathbb{R}^m$ fixé.

On dit que le schéma (2) est stable si

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - z_n| \leq M |y_0 - z_0| + M' \left(\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| \right)$$

où M et M' constantes indépendantes de N, y_0, z_0 .

* Def 3 : on dit que le schéma (2) est convergent si

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| = 0$$

$y_0 \rightarrow y(0)$

(déjà vue avec Euler)

* Def 4 : le schéma (2) est d'ordre (au moins) $p \geq 1$ si f est C^p et si

$$\sum_{n=0}^{N-1} |E_n| \leq C(\Delta T)^p$$

où E_n est l'erreur de consistance (et $C > 0$ une constante indépendante de N)

Ces 4 propriétés sont en général établies grâce à 4 propriétés de la fonction Φ reliées (et démontrées au paragraphe suivant).

(similaire à l'utilisation de la convexité)

3) Consistance, stabilité, convergence et ordre : propriétés de la fonction Φ associées

Théorème 1 : le schéma (2) est consistant si et seulement si :

$$\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

(pour tout $t \in [0, T], y \in \mathbb{R}^m$)

preuve : on a

$$E_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T \Phi(t_n, y(t_n), \Delta T)$$

$$\stackrel{\text{T.A.F.}}{=} \Delta T f(t_n, y(t_n)) - \Delta T \Phi(t_n, y(t_n), \Delta T)$$

$$= \Delta T(\alpha_n + \beta_n) \text{ où}$$

$$\begin{cases} \alpha_n = f(t_n, y(t_n)) - \Phi(t_n, y(t_n), 0) \\ \beta_n = \Phi(t_n, y(t_n), 0) - \Phi(t_n, y(t_n), \Delta T) \end{cases}$$

en notant $\tilde{\Phi}(t, h) = \Phi(t, y(t_n), h)$
 $\tilde{\Phi}$ est une fonction continue sur $[0, T] \times [0, T]$
 et donc uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$, par N assez grand, on a donc

$$\sum_{n=0}^N \Delta T |\beta_n| \leq \varepsilon$$

Par ailleurs,

$$\sum_{n=0}^N \Delta T |\alpha_n| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^T |f(t, y(t)) - \Phi(t, y(t), 0)| dt$$

par définition d'une intégrale de Riemann.

* Si la méthode est consistante, on a

$$f(t, y(t)) = \Phi(t, y(t), 0) \quad \forall t \in [0, T]$$

et par toute solution y de (1)

Soit $(t^*, y^*) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$. Par Cauchy-

Lipschitz, il existe une unique solution

y de (1) tq $y(t^*) = y^*$. On a donc

$$f(t^*, y^*) = \Phi(t^*, y^*, 0)$$

et Réciproquement, si $f(t, y) = \Phi(t, y, 0)$
 par tout $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$, on a
 bien la consistance du schéma.

Corollaire: la méthode d'Euler est
 consistante.

Théorème 2: le schéma (2) est
 stable si Φ est Lipschitzienne
 par rapport à sa 2^{ème} variable y :

$$\exists \Delta > 0, \forall (t, y_1, y_2, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m \times [0, T]$$

$$\|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)\| \leq \Delta \|y_2 - y_1\|$$

preuve: elle est basée sur le 2^{ème} lemme technique vu à la séance
 précédente lors de la convergence du

schéma d'Euler: si Φ est Lipschitz,
 on a, en soustrayant (2)' et (2):

$$\|y_{n+1} - z_{n+1}\| \leq \|y_n - z_n\| + \Delta T \cdot (\Delta \|y_n - z_n\| + |\varepsilon_n|)$$

On en déduit

$$\|y_n - z_n\| \leq e^{n(\Delta T)\Delta} \|y_0 - z_0\| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{(n-1-i)\Delta(\Delta T)} |\varepsilon_i|$$

$$\leq \underbrace{e^{T\Delta}}_M \|y_0 - z_0\| + \underbrace{e^{T\Delta}}_{M'} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i| \right)$$

et la méthode est stable.

Großartigkeit : la méthode d'Euler est stable

(en effet $\Phi(t, \cdot, h) = f(t, \cdot)$ est L -lipschitzienne).

Remarque : les constantes de stabilité obtenues : $M = M' = e^{\Delta T}$ peuvent être très grandes et donc conduire à un mauvais conditionnement numérique : voir TD 8 sur l'exemple d'Euler.

Théorème 3 : un schéma (2) est convergent s'il est consistant et stable
(consistance + stabilité \Rightarrow convergence)

preuve : on considère un schéma consistant et stable. On prend dans la définition de la stabilité, une perturbation ε_n égale à l'erreur de consistance. Dans ce cas le schéma (2)' devient "exact" :

$$z_n = y(t_n) \quad (\text{si } z_0 = y(0))$$

Avec la définition de la stabilité, on a :

$$|y_n - y(t_n)| \leq M |y_0 - y(0)| + M' \sum_{n=0}^N |\varepsilon_n| \quad (3)$$

Comme le schéma est consistant, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N |E_n| = 0 \text{ et on en déduit}$$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ y_0 \rightarrow y^{(0)}}} \left(\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \right) = 0$$

Corollaire : un schéma (2) est convergent si

- * $\forall (t, y), \underline{\Phi}(t, y, 0) = f(t, y)$
- et
- * $\underline{\Phi}$ est Lipschitzienne par rapport à sa $l^{\text{ème}}$ variable.

(exemple : le schéma d'Euler explicite est convergent : déjà vu "directement" en séance 9)

Remarque : la notion d'ordre relative à la vitesse de convergence de l'erreur de consistance s'interprète naturellement avec la relation (3)

Théorème 4 un schéma (2) est d'ordre $p \geq 1$ (au moins) si et seulement si

- * f et $\underline{\Phi}$ sont C^p
- * $\forall l \in \{0, \dots, p-1\}, \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m,$

$$\frac{\partial^l \underline{\Phi}(t, y, h)}{\partial h^l} \Big|_{h=0} = \frac{1}{l+1} f^{[l]}(t, y)$$

où $f^{[k]}$ désigne la dérivée totale

def :

$$f^{[0]} = f$$

$$f^{[k+1]}(t, y) = \underbrace{\partial_t f^{[k]}(t, y)}_{\mathbb{R}^m} + \underbrace{\nabla_y f^{[k]}(t, y)}_{\mathcal{M}_m(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{f^{[k]}(t, y)}_{\mathbb{R}^m}$$

preuve : voir poly ou [Demailly].

Corollaire : la méthode d'Euler est d'ordre 1 (si f est C^2) exactement.

preuve

* on a $\frac{\partial^0}{\partial h^0} \Phi(t, y, h) \Big|_{h=0} = \Phi(t, y, 0) = f(t, y)$

* avec $p=1$:

$$\frac{\partial^1}{\partial h^1} \Phi(t, y, h) \Big|_{h=0} = 0$$

alors que $\frac{\partial^1}{\partial h^1} f^{[1]}(t, y) \neq 0$

Ce n'est pas d'ordre 2.

Remarque : si f est C^p , on peut relier $f^{[p]}$ et y solution de (1) :

on montre facilement que :

$$y^{(p+1)}(t) = f^{[p]}(t, y(t))$$

$$\frac{1}{0+1} f^{[0]}(t, y) = f(t, y) \quad \parallel \quad 9$$

* avec $p=1$:

$$\frac{\partial^1}{\partial h^1} \Phi(t, y, h) \Big|_{h=0} = 0$$

alors que $\frac{\partial^1}{\partial h^1} f^{[1]}(t, y) \neq 0$

$$\frac{1}{1+1} f^{[1]}(t, y) \neq 0$$

Ce n'est pas d'ordre 2.

Remarque : si f est C^p , on peut relier $f^{[p]}$ et y solution de (1) :

on montre facilement que :

$$y^{(p+1)}(t) = f^{[p]}(t, y(t))$$

4) Exemples

On s'intéresse aux exemples du TD 10:

Ex 1 : soit le schéma (dit de Heun)

$$y_{n+1} = y_n + \Delta T \left[\underbrace{\frac{1}{2} f(t_n, y_n)}_{\text{"Euler exp."}} + \frac{1}{2} \underbrace{f(t_{n+1}, y_n + \Delta T f(t_n, y_n))}_{\text{"Euler impliate"}}$$

consistance, stabilité, convergence et ordre ?

Ici :

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} f(t, y) + \frac{1}{2} f(t+h, y+h f(t, y))$$

On calcule

$$\Phi(t, y, 0) = \frac{1}{2} f(t, y) + \frac{1}{2} f(t+0, y+0) = f(t, y) \Rightarrow \text{consistance}$$

On calcule ensuite

10

$$\|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)\|$$

qu'on cherche à majorer par

$$\Delta \|y_2 - y_1\|$$

(en supposant f L -Lipschitz
% à sa 2^{ème} variable).

On trouve après calculs

$$\Delta = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} (L(1 + TL))$$

\Rightarrow stabilité

On en déduit la convergence
du schéma.

À présent, pour l'ordre, on calcule \Rightarrow méthode d'ordre 2.

$$\frac{\partial}{\partial h} \widehat{\Phi}(t, y, h) \Big|_{h=0}$$

où

$$\widehat{\Phi}(t, y, h) = \frac{1}{2} f(t, y) + \frac{1}{2} f(t+h, y+h f(t, y))$$

et qu'on compare à

$$\frac{1}{1+h} f^{[1]}(t, y) = \partial_t f(t, y) + \nabla_y f(t, y) \cdot f(t, y)$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial h} \widehat{\Phi}(t, y, h) = 0 + \frac{1}{2} \partial_t f(\cdot, \cdot) + \frac{1}{2} \nabla_y f(\cdot, \cdot) \cdot f(t, y)$$

puis

$$\frac{\partial}{\partial h} \widehat{\Phi}(t, y, h) \Big|_{h=0} = \frac{1}{2} \partial_t f(t, y) + \frac{1}{2} \nabla_y f(t, y) \cdot f(t, y)$$

La méthode de Heun est plus précise que la méthode d'Euler. On le retrouvera au chapitre 16 dans la famille des méthodes de Runge-Kutta.

Ex 3 : soit la méthode

$$y_{n+1} = y_n + \Delta T \Phi(t_n, y_n, \Delta T)$$

où

$$\Phi(t_n, y_n, \Delta T) = \alpha f(t_n, y_n) + \beta f\left(t_n + \frac{\Delta T}{2}, y_n + \frac{\Delta T}{2} f(t_n, y_n)\right) + \gamma f(t_{n+1}, y_n + \Delta T f(t_n, y_n))$$

où (α, β, γ) paramètres à déterminer.
($\in [0, 1]^3$)

* Conditions sur (α, β, γ) par

- * consistence
- * stabilité
- * convergence
- * ordre 1 ou 2 ?

* ordre > 2 possible ou non ? 12

* consistence ? oui si $\alpha + \beta + \gamma = 1$

* stabilité ? oui :

$$\Delta = |\alpha|L + |\beta|L\left(1 + \frac{T}{2}L\right) + |\gamma|L(1 + TL)$$

* convergence ? oui si $\alpha + \beta + \gamma = 1$

* ordre 1 ? oui si $\alpha + \beta + \gamma = 1$

* ordre 2 ?

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial h}(x, y, h) = \beta \frac{1}{2} \partial_x f(\dots) + \beta \frac{1}{2} \nabla_y f(\dots) \cdot f(x, y) \quad \text{* ordre 3 ?}$$

$$+ \gamma \partial_x f(\dots) + \gamma \nabla_y f(\dots) \cdot f(x, y)$$

et ainsi

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial h}(x, y, h) \Big|_{h=0} = \frac{(\beta + \gamma)}{2} f^{[2]}(x, y)$$

Il faut et il suffit :

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1 \\ \beta \frac{1}{2} + \gamma &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

par que la méthode soit d'ordre 2
 (exemple: $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \dots$)

$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial h^2}(x, y, h)$: meo tard à calculer

On peut faire un cas simplifié où $f(x, y) \equiv f(y)$

Dans ce cas

$$\hat{\Phi}(x, y, h) = \alpha f(y) + \beta f(y + \frac{h}{2}) + \gamma f(y + h)$$

Il faut alors comparer

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial h^2}(x, y, h) \Big|_{h=0} \text{ et}$$

$$\frac{1}{3} f^{[2]}(y) = \frac{1}{3} (f^{[2]})' = \frac{1}{3} (f' f)'$$

Après calcul, on constate qu'il n'y
aucune méthode possible d'ordre 3.