

Séance 11 : résolution numérique des équations différentielles : méthodes d'ordre élevé (3/3)

(suite des séances 9 et 10)

I) Rappels des notations et propriétés

* Pb à résoudre :

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T] \\ y(0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

avec $f \in C^0$ et Lipschitz γ à sa variable y .

* Schéma d'approximation

$$(2) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) \Phi(t_n, y_n, t_{n+1} - t_n) \\ y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases} \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

où $\Phi \in C^0 : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$
(y_n : approximation de $y(t_n)$)

* Notions de consistance, stabilité, convergence et ordre, propriétés de Φ associées :

Le schéma numérique (2) est :

* consistant ssi $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$

* stable si Φ est Lipschitz % à sa seconde variable.

* convergent si le schéma est consistant et stable

* d'ordre $p \geq 1$ si

* f et Φ sont C^p

* $\forall l \in \{0, \dots, p-1\}, \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial^l \Phi(t, y, h)}{\partial h^l} \Big|_{h=0} = \frac{1}{l+1} f^{[l]}(t, y)$$

(où $f^{[l]}$: dérivée totale de f)

Déjà vu :

* méthode d'Euler :

$\Phi(t, y, h) = f(t, y) \rightarrow$ convergente et d'ordre 1

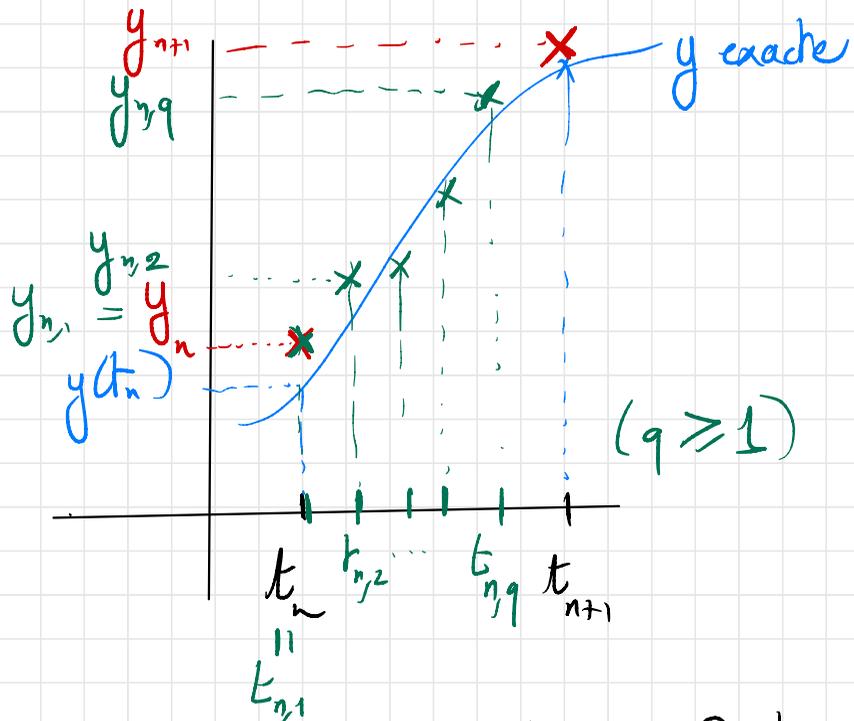
* méthode de Heun :

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t+h, y+h f(t, y))]$$

\rightarrow convergente et d'ordre 2

II Famille des méthodes de Runge-Kutta

On cherche ici à utiliser des méthodes de quadrature plus précises que les rectangles ou les trapèzes, afin de construire des schémas (2) d'ordre élevé.



Calcul de y_{n+1} à partir de y_n en 2 étapes :

→ calcul de points intermédiaires :

$y_{n,1}, \dots, y_{n,q}$, approximations successives de $y(t_{n,1}), \dots, y(t_{n,q})$

→ calcul de y_{n+1} en utilisant $y_{n,1}, \dots, y_{n,q}$ et une méthode de quadrature à définir.

La construction de ces 2 étapes consiste à utiliser des méthodes de quadrature pour approcher les formules exactes :

$$y(t_{n,i}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(s, y(s)) ds \quad (1 \leq i \leq q)$$

et

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$$

On utilise les notations suivantes :

$$* / t_{n,i} = t_n + c_i \underbrace{(t_{n+1} - t_n)}_{\Delta T \text{ (fixé à)}} /$$

$$(0 = c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_q \leq 1)$$

$$* / y_{n,i} = y_n + \Delta T \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}) /$$

$(1 \leq i \leq q)$

$$* / y_{n+1} = y_n + \Delta T \sum_{j=1}^q b_j f(t_{n,j}, y_{n,j}) /$$

Les coefficients $(c_i)_{1 \leq i \leq q}$, $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq i-1}}$

et $(b_i)_{1 \leq i \leq q}$ se rangent dans le

tableau suivant :

c_1	0		
\vdots	$a_{2,1}$	\ddots	
c_q	$a_{q,1}$	\dots	$a_{q,q-1}$ 0
1	b_1	\dots	b_q

Remarque : on retrouve dans cette construction les méthodes déjà vues :

* Euler : $q = 1$

$$0 \mid 0 \quad (b_1 = 1)$$

$$1 \mid 1$$

* Heun : $q = 2$

$$0 \mid 0$$

$$1 \mid 1 \quad 0$$

$$1 \mid \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

← rectangle à gauche
← trapèzes

III) Propriétés des méthodes de Runge-Kutta

* Expression de la fonction Φ :

$$\Phi(t, y, h) = \sum_{j=1}^q b_j f(t + c_j h, y_j)$$

où $y_j = y + h \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} f(t + c_i h, y_i)$

On peut alors déterminer les propriétés du schéma associé :

* Consistance : le schéma est consistant si et seulement si $\sum_{j=1}^q b_j = 1$ (*)

(cela correspond à une méthode de quadrature d'ordre 0) 5

En général on impose les mêmes propriétés par les autres méthodes de quadrature utilisées :

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \quad (**)$$

(sommes en ligne sur le tableau des coefficients)

* Stabilité : les méthodes de Runge-Kutta sont stables

\Rightarrow sous les conditions (*) et (**)
les méthodes de Runge-Kutta sont convergentes.

* ordre des méthodes de Runge-Kutta
 en calculant $\frac{\partial^{(q)} \Phi(t, y, h)}{\partial h^q} \Big|_{h=0}$, on

obtient des conditions sur les coefficients
 par obtenir des méthodes d'ordre élevé:
 2, 3, ... ?

→ par l'ordre 2, on doit avoir

$$\sum_{j=1}^q b_j c_j = \frac{1}{2} \quad (***)$$

Les conditions sont plus difficiles à
 établir par des ordres élevés (recours
 à un logiciel de calcul formel: Maple, Lythen, ...)

→ par l'ordre 4, il existe une
 méthode s'exprimant simplement: 6

pts	0	0				
	1/2	1/2	0			
	1/2	0	1/2	0		
	1	0	0	1	0	
	1	1/6	2/6	2/6	1/6	

← rectangle à gauche
 ← rectangle à droite
 ← pt milieu
 ← Simpson (q=4)

ponds

De manière générale, si $5 \leq q \leq 7$,
 il existe des méthodes d'ordre $q-1$, et
 si $q \geq 8$, il existe des méthodes d'ordre
 $q-2$. La méthode RK4 précédente
 offre le meilleur compromis
 simplicité / précision.

III } Implementation et exemples

Exercice : implementation de RK4, et test sur différents exemples de modélisation.

Comparaison avec la méthode d'Euler/Heun

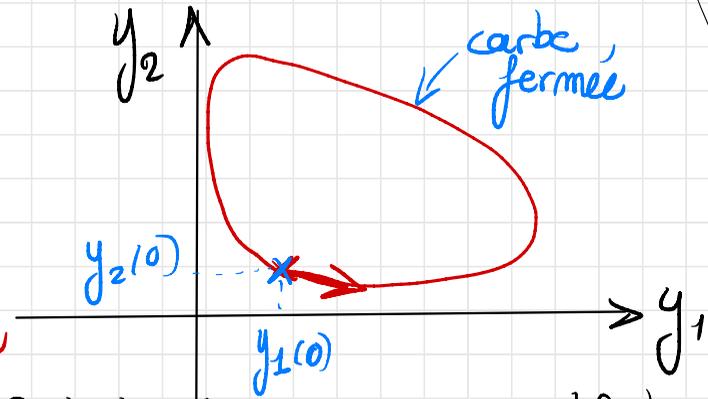
Exemple 1 : le modèle proie-prédateurs de Volterra :

- Preys de Volterra : \leftarrow proies

$$\begin{cases} y_1'(t) = a y_1(t) - b y_1(t) y_2(t) \\ y_2'(t) = -c y_2(t) + d y_1(t) y_2(t) \end{cases}$$

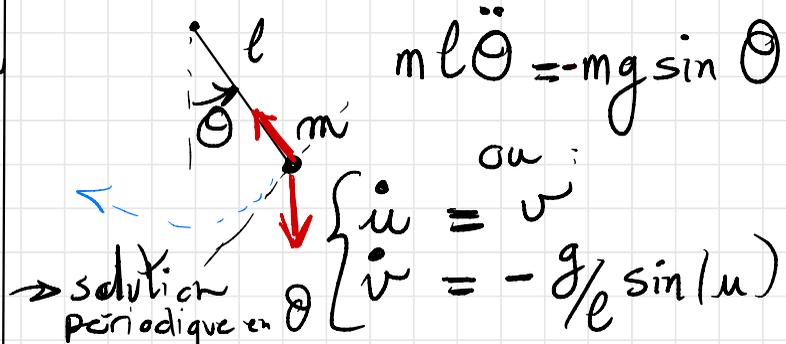
($a, b, c, d > 0$) et $(y_1(0), y_2(0)) \in (\mathbb{R}_+^2)^2$

\rightarrow ce modèle définit des solutions bi-périodiques :



On teste la précision des méthodes sur l'aspect bi-périodique.

Exemple 2 : le pendule périodique



Modèle Volterra

$$(a=b=c=d=1)$$

* $\Delta T = 0,02$: Euler vs Heun

Euler:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta f(t_n, y_n)$$

Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \Delta T \left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + \Delta T f(t_n, y_n)) \right)$$

$$\text{ou}$$
$$f\left(t, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 - y_1 y_2 \\ -y_2 + y_1 y_2 \end{pmatrix}$$