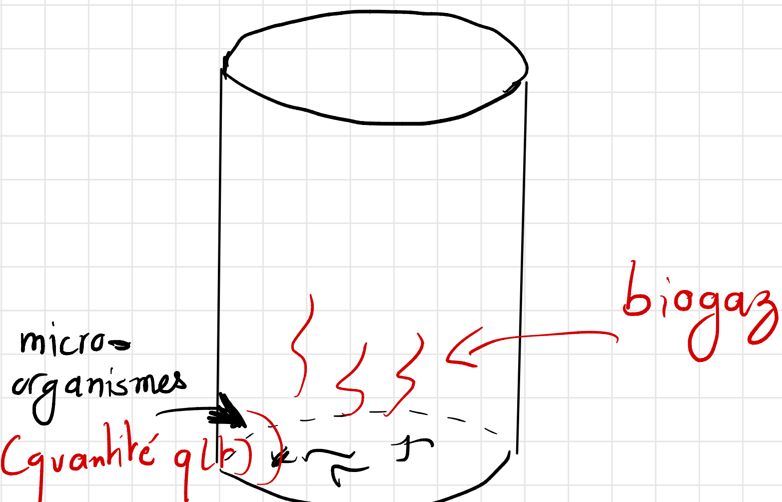
# Séance 13 : travail collectif sur le texte "réacteur biologique"

## I) Présentation du modèle




$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dq(t)}{dt} = \underbrace{a\,q(t)}_{\text{croissance}} - \underbrace{b\,q(t)^2}_{\text{compétition interne}} - \underbrace{c_1 c_2\, q(t) \int_0^t q(\tau)\,d\tau}_{\text{toxicité du gaz produite}} \\ q(0) = q_0 \end{cases}$$

→ Objectif : calculer la quantité totale produite

$$S = \int_0^T q(t)\,dt$$

## II) Nouvelles expressions du modèle

→ Adimensionalisation :

$t \rightarrow \dfrac{ct}{b}\ (\equiv \tau)$ / $q \rightarrow \dfrac{bq}{a}\ (\equiv u)$

On se ramène au système (2) :

$$(2)\begin{cases} u(0) = u_0 \\ K \dfrac{du}{ds}(s) = u(s) - u(s)^2 - u(s)\displaystyle\int_0^s u(\sigma)\,d\sigma \end{cases}$$

(où $K = \dfrac{c}{ab}$)

(système intégro-différentiel)

* Ré-écriture sous forme d'un système d'EDO

On note $y(s) = \displaystyle\int_0^s u(\sigma)\,d\sigma$.

(quantité produite jusqu'à l'instant $s$)

(2) devient :

$$(12)\begin{cases} y' = u \\ u' = \dfrac{1}{K} u(1-u-y) \end{cases}$$

avec $\begin{cases} u(0) = u_0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

## III Discrétisation

* Discrétisation de (12) :

→ système classique d'EDO non linéaires : on peut utiliser un solveur disponible ou écrire un schéma classique (Euler, RK...)

* Discrétisation de (2) :

→ nécessité de proposer un schéma spécifique :

$t_0 = 0 < \cdots < t_N = T$

(pas de temps : $h$)

$$\begin{cases} u_n : \text{approximation de } u(nh) \\ S_n : \quad \text{''} \quad\quad \text{''} \int_0^{nh} u(s)\,ds \end{cases}$$

On propose de calculer l'intégrale avec une méthode des trapèzes et de résoudre l'EDO avec la méthode d'Euler explicite. On aboutit au schéma :

$$\boxed{\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = S_{n-1} + \frac{h}{2}(u_{n-1} + u_n) \\ u_{n+1} = u_n + h\frac{u_n}{K}(1 - u_n - S_n) \end{cases}}$$

($u_0 = 0.1$, $K \in \{0.05, 0.1, 0.5\}$)

($h = 0.01$, $T = 5$)



## IV) Discussion

On remarque que si on note

$u(s) = \tilde{u}(y(s))$, on a :

$(\tilde{u})' \underbrace{y'}_{u} = u' = u(1-u-y)/K$

soit :

$(\tilde{u})' = (1 - \tilde{u} - y)/K$

$\Rightarrow K\tilde{u}' + \tilde{u} = 1 - y$

EDO linéaire, ordre 1, 2nd membre

On obtient :

$$\tilde{u}(y) = Ce^{-Ky} + \underbrace{(1+K-y)}_{\text{solution particulière}}$$

$\tilde{u}(0) = u_0 \implies$

$$\tilde{u}(y) = (1+K-y) + (1+K-u_0)e^{-y/K} \quad (13)$$

Toutes les courbes intégrales dans l'espace des phases $(y, u)$ sont incluses dans les courbes

$$u = (1+K-y) + (1+K-u_0)e^{-y/K}$$

On déduit de cette observations différents éléments qualitatifs du modèle :

→ si $u_0 < 1$, $u$ est croissante, atteint une valeur maximale

$$u_{max} = 1 + K\ln\left(\frac{K}{1+K-u_0}\right)$$

(en dérivant (13))

puis décroit vers 0 (lorsque $t \to +\infty$)

→ si $u_0 > 1$ : $u$ est décroissante vers 0 (lorsque $t \to +\infty$)

→ $y$ (quantité de biogaz produite) est croissante de 0 vers $y_{max}$ (qté totale de biogaz produite)

→ 21 et 28/03 :

etude de textes relatifs aux EDP :

- * transport de particules
- * equation de la chaleur
- * vibration d'une corde