

Séance 15 : travail collectif sur
2 textes : l'équation de la chaleur
et les vibrations d'une corde

Texte chaleur :

Fakir, Emmanuel, Tahar

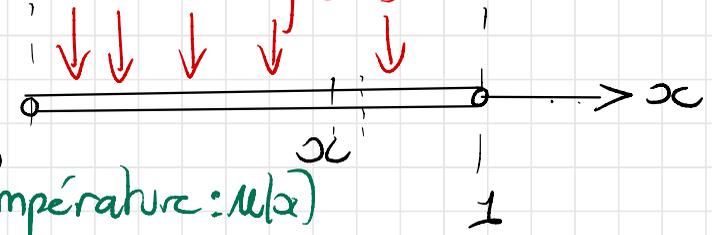
Texte corde :

Youssef, Zaid, Youness

I) Modélisation

→ chaleur :
conductivité : $a(x)$ corde (section S)

source de chaleur : $f(x)$



Variation du flux entre x et $x+dx$

$$\int_x^{x+dx} S f(x) dx = S (q(x+dx) - q(x))$$

avec $\frac{dq(x)}{dx} = -a(x) \frac{du(x)}{dx}$

On obtient l'EDO :

$$\frac{d}{dx} (a(x) \frac{du(x)}{dx}) = f(x) \quad (1)$$

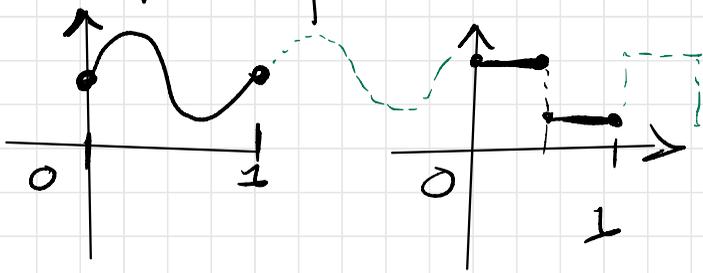
avec les conditions aux limites :

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2)$$

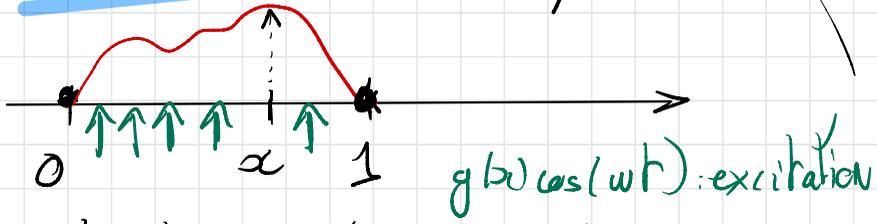
L'objectif du texte est de comprendre le comportement asymptotique qd $n \rightarrow +\infty$

de $\alpha \mapsto u_n(x)$ lorsque $a_n(x) = \alpha(n\omega)$ où

α : 1 périodique



→ corde : $v(t,x)$: déformation



La déformation est solution de l'équation des cordes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) = g(x)\cos(\omega t) \\ v(t,0) = v(t,1) = 0 \text{ (corde fixée)} \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = 0 \\ v(0,x) = 0 \end{cases}$$

↑ conditions initiale : corde au repos et lâchée sans vitesse

(1)

L'objectif consiste :

* à étudier le comportement de la déformation et à l'approcher numériquement de 2 façons

* à étudier les fréquences propres de la structure et leur répartition sur \mathbb{R}^* par différentes géométries (corde, membrane carrée, ...)

"peut-on entendre la forme d'un tambour ?"

II } Etude mathématique

3

Dans tous les cas, on dispose d'une EDO ou EDP, dont il faut tout d'abord justifier l'existence et l'unicité d'une solution.

Ensuite, le texte s'intéresse à divers aspects mathématiques) par lesquels une démonstration est parfois proposée ou suggérée. Il est alors intéressant de paroir la compléter.

→ chaleur : on suppose $f, a \in C^0([0,1])$
et $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$
l'EDO (1) possède une unique
solution u , donnée par (4), formule
peu explicite.

L'étude asymptotique est résumée
dans le texte et peut faire l'objet d'un
développement mathématique :

→ Ascoli permet d'obtenir la
convergence de u_n vers $u \in C([0,1])$

→ la notion de convergence faible
est ensuite utilisée pour montrer que
 u est solution de l'EDO

$$\frac{d}{dx} \left(a_{\text{lim}} \frac{d}{dx} u(x) \right) = f(x) \quad (2)$$
$$\text{avec } a_{\text{lim}} = \left(\int_0^1 \frac{1}{a(y)} dy \right)^{-1}$$

(moyenne harmonique et non arithmétique
de a)

→ corde : on admet l'existence et
l'unicité de la solution $(h, x) \mapsto v(h, x)$.

On propose une approche spectrale
permettant d'approcher v , à partir
de l'étude des valeurs propres/vecteurs
propres du laplacien :

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}(u_k) = \lambda_k u_k \quad x \in]0,1[\\ u_k(0) = u_k(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

alors
 $v(t,x) = \sum_k y_k(t) u_k$
 avec y_k vérifiant.

On admet l'existence de solutions (u_k) par des valeurs $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} y_k''(t) + \lambda_k y_k(t) = g_k \cos(\omega t) \\ y_k(0) = 0 \text{ et } y_k'(0) = 0 \end{cases}$$

Ces solutions forment une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$.

En tronquant à la fréquence k :

Elles permettent de décomposer la solution v de (1) :

$$v_k(t,x) = \sum_{k=0}^k y_k(t) u_k, \text{ on}$$

$$\text{si } g(x) = \sum_k g_k u_k(x)$$

peut montrer que

$$\sup_t \|v - v_k\|_{L^2(]0,1[)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

III Etude numérique

On cherche ici à vérifier les conjectures ou les résultats mathématiques obtenus en partie II,

→ chaleur : on cherche à retrouver le comportement asymptotique de u_n et la convergence vers w .

Par cela, on résout (1) et (2) de manière approchée avec la méthode des éléments finis.

→ résolution de (2) (plus simple) $\setminus 6$
($a \equiv \text{cte}$). Dans ce cas, on obtient la matrice classique du Laplacien discrétisé :

$$A^{(N)} \equiv \text{cte} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & & & & \\ 0 & & & & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

→ résolution de (1) (avec $a_n = d \ln(x)$)

→ phénomène de résonance

lorsque $n = N$
↑ variations de a ↓ pas de discrétisation

→ corde: on cherche à retrouver l'approximation par truncature des modes propres dans un cas particulier:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{11} [a, b](x) \\ \omega = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (a=0,7; b=0,8)$$

→ on doit calculer par la corde les valeurs de λ_k et u_k (exactes)

$$\begin{cases} \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = (k\pi)^2 \\ u_k(x) = \sin(k\pi x) \end{cases}$$

→ calculer $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ composantes de g dans la base $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$

→ calculer $(y_k(t))_k$

→ représenter la truncature par $k=3$ à comparer avec celle par $k=200$ (supposée proche de la solution exacte)

$$g_k = \frac{\langle g, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} = \frac{\int_a^b \sin(k\pi x) dx}{\int_0^1 \sin^2(k\pi x) dx}$$

(calcul explicite)

(*) numériquement.