2ème séance : résolution de systèmes non linéaires

Problème à résoudre : trouver les solutions $(x_1, \dots x_n)$ du système non linéaire de n équations :

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots x_n) = 0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

ou plus précisément, construire une suite d'approximations convergente de la (ou les) solutions de $(*)$

On note $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et on cherche à résoudre le système non linéaire

$$\boxed{f(x) = 0}$$

Parfois, on recherche aussi les solutions de l'équation

$$\boxed{g(x) = x}$$

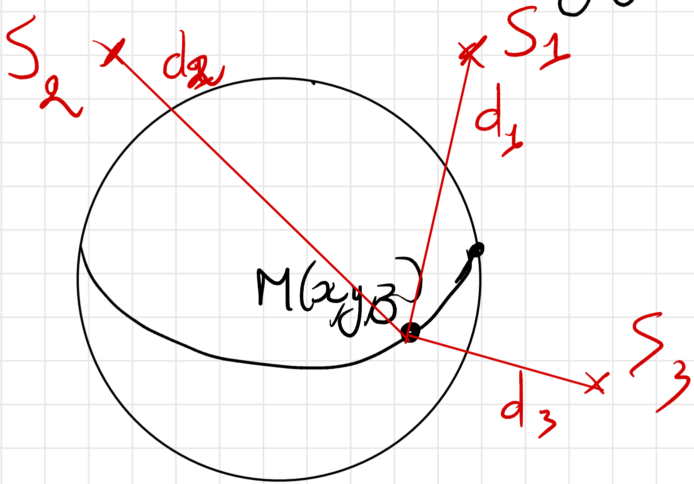
où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Notez que le cas $n=1$ est très spécifique et pour lequel il existe des méthodes dédiées (dichotomie, ...)

Exemples :

→ recherche des racines d'un polynome $P \in \mathbb{R}[x]$ ou d'un système polynomial.

→ G.P.S (Global Positioning System)



Pour trouver (x,y,z), on résout le système à 3 équations

$$\begin{cases} d(S_1, M) = d_1 \\ d(S_2, M) = d_2 \\ d(S_3, M) = d_3 \end{cases}$$

(voir exemple en TP : exercice Python avec méthode de Newton)

→ texte de modélisation : équilibre chimique

Plan :

1) Méthodes itératives
2) Méthode de Newton
3) Autres méthodes

1) Méthodes itératives

le théorème fondamental de Picard est le suivant :

Théorème 1 : soit A fermé de $\mathbb{R}^n$ et $g : A \to \mathbb{R}^n$ telle que

(i) $g(A) \subset A$ (stabilité de A par g)

(ii) pour tous $(x, y) \in A^2$, on a $\|g(x) - g(y)\| \leq K \|x - y\|$ où K est un réel indépendant de x et y dans $]0, 1[$. (g strictement contractante)

Sous ces hypothèses, il existe un unique $x^* \in A$ tq :

$g(x^*) = x^*$ (x^* pt fixe de g)

De plus, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

converge vers x^* de manière géométrique :

$$\|x_k - x^*\| \leq K^k \cdot \frac{\|x_1 - x_0\|}{1 - K}$$

preuve : on utilise la suite proposée dans l'énoncé (par stabilité, $x_k \in A$)

On montre que cette suite est de Cauchy dans A complet :

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|g(x_k) - g(x_{k-1})\|$$
$$\leq K \|x_k - x_{k-1}\|$$
$$\dots \leq K^k \|x_1 - x_0\|$$

On en déduit

$$\|x_l - x_k\| \leq K^{l-1}\|x_1 - x_0\| + \dots + K^k \|x_1 - x_0\|$$

$(l \geq k)$

soit :

$$\|x_l - x_k\| \leq \frac{K^k}{1-K} \|x_1 - x_0\|$$

On en déduit que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $x^* \in A$.

On a alors, par passage à la limite :

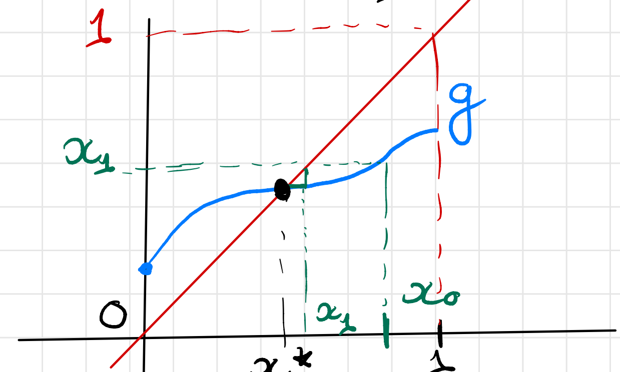
$$x^* = g(x^*)$$

et

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{K^k}{1-K} \|x_1 - x_0\|$$

L'unicité de x^* provient du caractère strictement contractant de g. //

Illustration si $n = 1$:



Un cas particulier intéressant (pour lequel la convergence de (x_k) est plus rapide) est le cas où g est régulière et $Dg(x^*) = 0$.

Théorème 2 : on suppose de plus que $x^* \in \mathring{A}$ et $g \in C^2(\mathring{A}, \mathbb{R}^n)$.

Si on a $Dg(x^*) = 0$ (Jacobien) alors la convergence de (x_k) est quadratique :

$$\|x_{k+1} - x^*\| = O(\|x_k - x^*\|^2)$$

preuve : on utilise Taylor-Young

$$g(x_k) = \overbrace{g(x^*)}^{x^*} + \cancel{Dg(x^*)}.(x_k - x^*) + O(\|x_k - x^*\|^2)$$

Remarque : convergence géométrique semblable à $O(\rho^k)$ $(\rho < 1)$ et convergence quadratique semblable à $O(\rho^{2^k})$ (très rapide)

2) Méthode de Newton

On cherche à présent à approcher les solutions du système $f(x) = 0$.

On va se placer dans la situation du Th 2 par une fonction g bien choisie à partir de f.

Théorème 3 : soit $f \in C^3(A, \mathbb{R}^n)$ avec A ouvert et soit $x^* \in A$ tel que $f(x^*) = 0$

On suppose que $Df(x^*)$ est un isomorphisme ($f'(x^*) \neq 0$ si $n=1$)

Dans ce cas, il existe un voisinage V de x^* dans A tel que la suite

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} \cdot f(x_k) \end{cases}}$$

converge vers x^* de manière quadratique

preuve : comme $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, il existe $\tilde{V}$ voisinage de x^* tq $\forall x \in \tilde{V}$, $Df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$.

On construit à bon droit :

$$g \left(\begin{array}{l} \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto x - Df(x)^{-1} \cdot f(x) \end{array} \right)$$

On a :

* $g(x^*) = x^* - 0$
* g est C^2 sur $\tilde{V}$ et

$$Dg(\bar{x}) = Id - D(Df(\bar{x})^{-1}) \cdot f(\bar{x}) - Df(\bar{x})^{-1} \cdot Df(\bar{x})$$
$$= 0$$

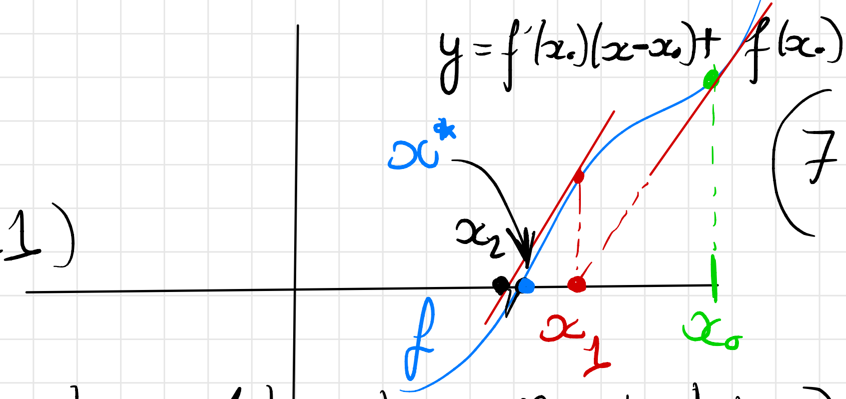
Il existe alors un voisinage $V \subset \tilde{V}$ tel que g est strictement contractante sur V ($|||Dg(x)||| < K < 1$) et V stable par g.

Le Théorème 2 permet de conclure la démonstration //

Le cas particulier où $n = 1$ s'énonce facilement et s'illustre également géométriquement.

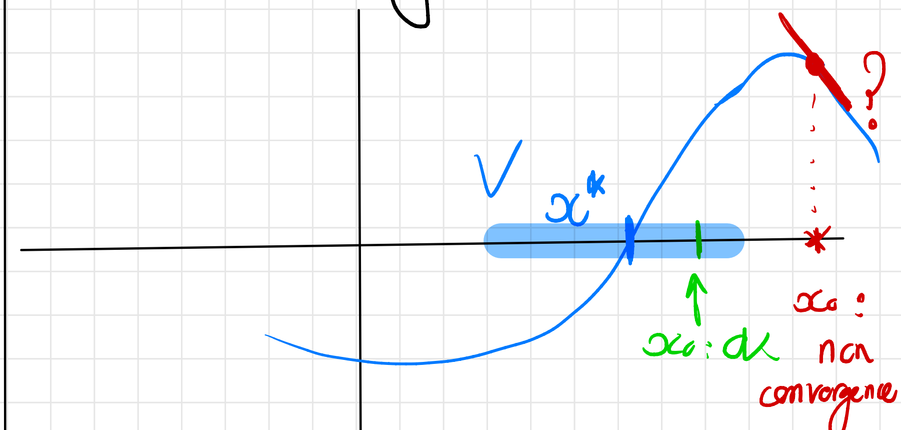
Si $n = 1$, la suite (x_k) s'écrit :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



(on abaisse la tangente sur l'axe des abscisses)

On peut aussi observer facilement la possible non convergence de la suite.



Un exemple célèbre d'application de la méthode de Newton : calcul approché de $\sqrt{a}$ si $a>0$:

On prend $f(x) = x^2 - a$ et on construit la méthode suivante

$$\boxed{\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{cases}}$$

On montre que cette suite converge toujours (de manière quadratique) vers $\sqrt{a}$.

(algorithme phénicien).

Plus généralement, on peut approcher la plus grande racine d'un polynôme scindé avec Newton. (voir [Demailly])

A l'inverse, il peut être difficile de faire converger la méthode de Newton, ne connaissant pas le bassin d'attraction de x^*.

De plus, un phénomène de chaos à partir de x_0 est possible

($\leadsto$ fractales dans $\mathbb{R}^2$ avec $f(z) = z^3 - z$)

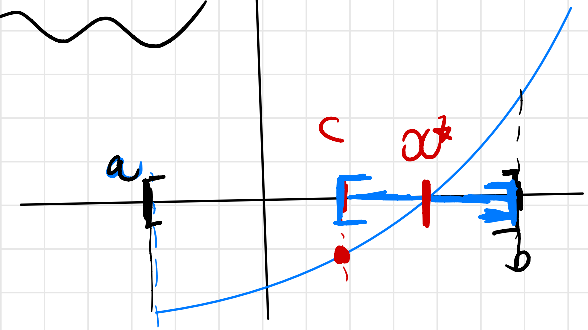
3) Autres méthodes

Il existe, soit pour $n=1$, soit de manière générale, certaines méthodes autres que Picard et Newton :

* si $n=1$:
  - → dichotomie
  - → fausse position
  - → sécante
* n quelconque :
  - → Newton généralisé

(on approche $Df(x_n)^{-1}$ par A_n^{-1} où $A_n \simeq Df(x_n)$)

Dichotomie :

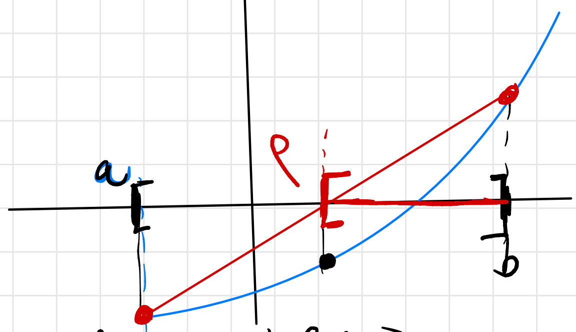


$\begin{cases} * \ f(a)f(b) < 0 \\ * \ f \text{ strictement monotone et continue} \end{cases}$

⇝ suite emboîtée d'intervalles $[a_n, b_n]$ de taille $\frac{(b-a)}{2^n}$ qui contient l'unique racine x^* de f.

⇒ convergence en $O\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ (géométrique)

Fausse position :



$$\rho = \frac{a f(b) - b f(a)}{b - a}$$

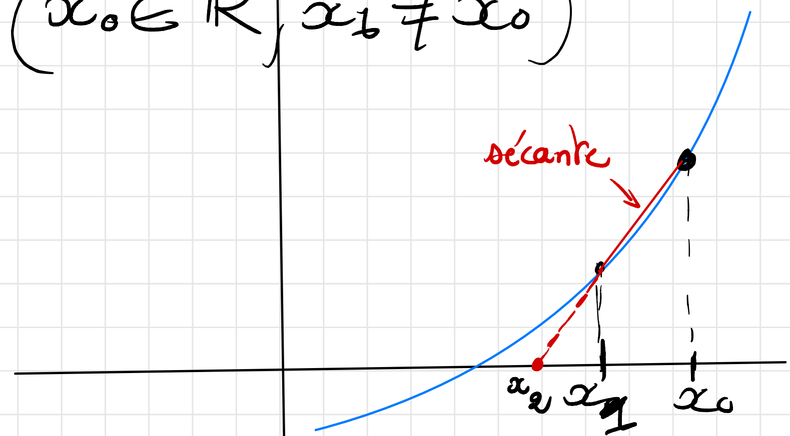
(on remplace ρ par c dans la dichotomie)

La convergence reste géométrique mais peut devenir quadratique

Sécante

Au lieu de calculer $f'(x_n)$ dans la méthode de Newton, on l'approche par une corde :

$(x_0 \in \mathbb{R} \mid x_1 \neq x_0)$



On construit :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k)$$

On peut montrer que la méthode converge pour x_0 et x_1 suffisament proches de x^*, avec une vitesse de convergence intermédiaire entre l'ordre 1 (géométrique) et l'ordre 2 (quadratique), d'ordre

$$\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (nombre d'or).}$$

(voir [Demailly] ou poly de cours)

A faire :

→ Implémentation Python de Newton par l'exemple du GPS

→ quelques exercices de traitement de cas particuliers (voir feuille n° 2)

Illustration Scilab/Matlab :

Résolution du système non linéaire :

$$\begin{cases} e^x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$