

Séance 6 : méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Le problème reste inchangé : on recherche $x \in \mathbb{R}^n$, unique solution du système linéaire cramérien

$$\underline{Ax = b}$$

avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

* A présent, on construit une suite d'approximations $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ quelconque}} \\ x_{k+1} \text{ défini à partir de } x_k \\ \text{et telle que } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x \end{array} \right.$

1) Principe général

1

Les méthodes itératives considérées ici consistent à décomposer A sous la forme :

$$\underline{A = M - N}$$

où $M \in GL_n(\mathbb{R})$ "facile à inverser" (c'est à dire : diagonale, triangulaire), et à définir la suite (x_k) suivant la relation :

$$\underline{x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)}$$

Dans le cas où $x_k \rightarrow x^*$, on en déduit nécessairement :

$$x^* = M^{-1}(Nx^* + b) \Leftrightarrow (M - N)x^* = b \\ \Leftrightarrow x^* = x //$$

On a le théorème suivant caractérisant la convergence de la suite (x_k) :

Théorème : la méthode itérative associée

à la décomposition (M, N) converge, c'est à dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

si et seulement si : $\rho(M^{-1}N) < 1$

preuve : on suppose que $\rho(M^{-1}N) < 1$.

On a vu (en séance 3) qu'il existe alors

une norme subordonnée, $\|\cdot\|$, telle que

$\|M^{-1}N\| < 1$. En utilisant la norme associée dans \mathbb{R}^n , $\|\cdot\|$, on a, en notant

$$e_k = x_k - x,$$

$$x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$$

$$x = M^{-1}(Nx + b)$$

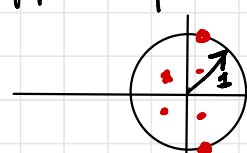
$$\Rightarrow e_{k+1} = M^{-1}N e_k, \text{ soit } \|e_{k+1}\| \leq \|M^{-1}N\| \|e_k\|.$$

On en déduit

$$\|e_k\| \leq \underbrace{\|M^{-1}N\|}_{< 1}^k \|e_0\|$$

$$\text{puis } \lim_{k \rightarrow +\infty} e_k = \mathbf{0}$$

* On suppose que $\rho(M^{-1}N) \geq 1$.



Il existe donc $u \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tq :

$$|\lambda| \geq 1 \text{ et } (M^{-1}N)u = \lambda u$$

En écrivant $u = \operatorname{Re}(u) + i \operatorname{Im}(u)$

et en prenant $\alpha_0^* = \alpha + \operatorname{Re}(u)$ ou

$\tilde{\alpha}_0 = \operatorname{Im}(u)$, sachant :

$$(M^{-1}N)^k u = \lambda^k u, \text{ soit}$$

$$\|(M^{-1}N)^k u\| \not\rightarrow 0, \text{ on en}$$

deduit que $e_k \not\rightarrow 0$ par une

des deux valeurs α_0^* ou $\tilde{\alpha}_0$.

Un cas particulier important concerne les matrices symétriques, définies positives :

Théorème : soit $A \gg 0$. On a

toujours ${}^t M + N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si de plus

${}^t M + N \gg 0$, alors la méthode itérative associée à la décomposition (M, N) est convergente. 3

preuve

* Partie 1 : ${}^r A = A \Rightarrow$

$${}^r (M - N) = M - N \text{ soit :}$$

$${}^t ({}^t M + N) = M + {}^r N = {}^t M + N \quad //$$

* Partie 2 : on construit une

norme subordonnée associée à la

$$\text{norme euclidienne : } \|x\|_A = \sqrt{\langle x, Ax \rangle}$$

et on montre qu'on a alors

$$\|M^{-1}N\|_A < 1 \text{ (voir poly)}$$

Remarque: on constate dans la démonstration du 1^{er} théorème que la vitesse de convergence d'une méthode itérative est géométrique, de raison $\rho(M^{-1}N)$.

2) Méthodes de Jacobi et Gauss Seidel

2.1) Méthode de Jacobi

On appelle méthode de Jacobi) la méthode itérative associée à la décomposition

$$A = M - N \text{ où}$$

$$M = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = D \quad \text{(partie diagonale de A)}$$

$$N = M - A \quad \text{(le reste, hors diagonale)}$$

On calcule

$$J = M^{-1}N = D^{-1}(D - A)$$

$$= \text{Id} - D^{-1}A$$

On doit avoir nécessairement:

$$a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

par que M soit inversible.

Dans ce cas, la méthode s'écrit:

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{a_{ii}} \left(-a_{i,1} x_k^1 - \dots - a_{i,i-1} x_k^{i-1} - a_{i,i+1} x_k^{i+1} - \dots - a_{i,n} x_k^n \right) + b_i$$

$(1 \leq i \leq n)$

avec $\alpha_k = (\alpha_k^1, \dots, \alpha_k^n)$.

Cette méthode converge ssi $\rho(J) < 1$

* Cas particulier: si $A \gg 0$,

la méthode converge ssi

$2D - A \gg 0$ (pas toujours

vrai: voir exercices).

2.2. Méthode de Gauss Seidel

Def: si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{D} & -F \\ -E & \end{pmatrix}$$

partie supérieure stricte

partie inférieure stricte

On appelle méthode de Gauss Seidel / 4

la méthode itérative associée à la

décomposition $A = M - N$ où

$$\begin{cases} M = D - E \\ N = M - A = F \end{cases}$$

on note $R_1 = M^{-1}N = (D - E)^{-1}F$

Comme précédemment, la méthode est définie ssi $a_{ii} \neq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Dans ce cas, la méthode s'écrit:

$$\alpha_{k+1}^i = \frac{1}{a_{ii}} \left(-a_{i,j_1}^i x_{k+1}^{j_1} - \dots - a_{i,j_{i-1}}^i x_{k+1}^{j_{i-1}} - a_{i,j_i}^i x_k^{j_i} - \dots - a_{i,j_n}^i x_k^{j_n} \right) + b_i$$

indices $k+1$ au lieu de k

$(1 \leq i \leq n)$

(Implementation Python: exercice).

Cas particulier : si $A \gg 0$, on a

$${}^t M + N = {}^t (D - E) + F = {}^t D - F + F = D$$

Gr. $D \gg 0$ (car $a_{ii} > 0$: Sylvester).

La méthode de Gauss Seidel est donc convergente si $A \gg 0$.

2.3) Comparaison des 2 méthodes

De manière générale, il n'y a pas de supériorité d'une méthode par rapport à l'autre (voir TDS). Il existe cependant des comparaisons possibles

dans des cas particuliers :

Proposition : soit A une matrice tridiagonale. On a alors

$$\rho(L_1) = \rho(J)^2$$

En particulier, les méthodes convergent simultanément, et la méthode de Gauss Seidel est plus rapide que Jacobi.

preuve : elle est basée sur la propriété suivante reliant les polynômes caractéristiques de L_1 et de J :

$$\chi_{L_1}(\lambda) = C \lambda^n \chi_J(\lambda) \quad (\text{voir poly}).$$

3) Autres méthodes itératives

3.1) Méthode de relaxation (SOR)

L'idée consiste à ne mettre dans M qu'une partie de la diagonale de A :

$$\begin{cases} M = \frac{1}{\omega} D - E \\ N = M - A = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F \end{cases}$$

où $\omega > 0$ (paramètre de relaxation)

Les remarques (définition et écriture d'une itération) vues par Jacobi et

Gauss Seidel s'étendent à cette méthode. On note :

$$R_{\omega} = \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F\right)$$

(si $\omega = 1$, on retrouve Gauss Seidel)

On a nécessairement $\omega \in]0, 2[$ parce que la méthode converge. En effet,

$$\det(R_{\omega}) = \frac{\det(N)}{\det(M)} = \frac{\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)^n}{\left(\frac{1}{\omega}\right)^n} = (1 - \omega)^n.$$

Ainsi, $|\det(R_{\omega})| \geq 1$ si $\omega \notin]0, 2[$.

On en déduit que $\rho(R_{\omega}) \geq 1$ dans ce cas.

* Si $A \gg 0$, on a

$$M+N = \left(\frac{1}{\omega} D - E\right) + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F$$

$$= \frac{1}{\omega} D - F + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2}{\omega} - 1\right)}_{> 0 \text{ si } \omega \in]0, 2[} D$$

> 0 si $\omega \in]0, 2[$

La méthode SOR (ou de relaxation)

est donc convergente pour tout $\omega \in]0, 2[$
dans ce cas.

On a le résultat suivant comparant

Jacobi, Gauss Seidel et SOR (Successive

Over Relaxation)

Proposition : soit $A \gg 0$ 7

et tridiagonale (par exemple, la matrice du Laplacien discrétisé).

Dans ce cas, les 3 méthodes convergent et il existe un paramètre optimal

$\omega_{opt} \in]1, 2[$ tel que

$$\rho(R_{\omega_{opt}}) = \inf_{\omega \in]0, 2[} \rho(R_{\omega})$$

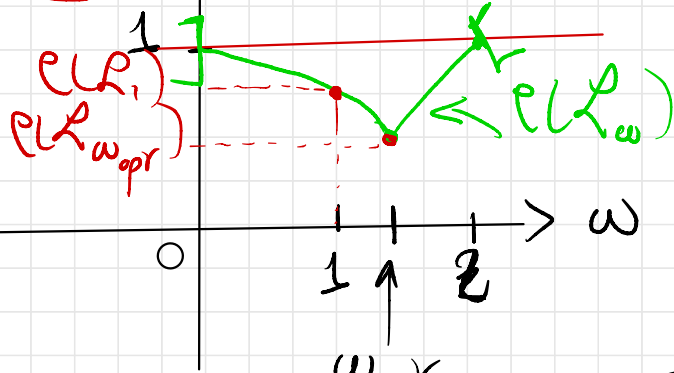
On a donc

$$\rho(R_{\omega_{opt}}) < \rho(L_1) = \rho(J)^2$$

$$\text{De plus } \omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}$$

$$\text{et } \rho(L_{\omega_{\text{opt}}}) = \omega_{\text{opt}} - 1.$$

preuve (voir Ciarlet)



(voir illustration Salab/Pytho)

3.2) Méthode du gradient

Il s'agit d'une méthode itérative basée sur la décomposition suivante:

$$\begin{cases} M = \frac{1}{\alpha} \text{Id} \\ N = M - A = \frac{1}{\alpha} \text{Id} - A \end{cases} \quad / \quad 8$$

où α est un paramètre réel non nul.

Cette méthode, appelée méthode du gradient (voir explication ci-dessous),

est toujours définie.

Une itération s'écrit:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \alpha \left(\left(\frac{1}{\alpha} \text{I} - A \right) x_k + b \right) \\ &= x_k - \alpha (A x_k - b) \end{aligned}$$

(côt: $O(n^2)$)

$$\ast \text{ Si } A \gg 0, \quad M + N = \frac{2}{\alpha} \text{Id} - A$$

$\frac{2}{\alpha}$ $\text{Id} - A$ est définie positivessi
 $\alpha \in]0, \frac{2}{\rho(A)}[$ [et dans ce cas la

méthode du gradient converge.

La proposition suivante précise ce résultat:

Proposition: soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de
valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

(i) si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, la méthode du
gradient ne converge pas.

(ii) si $A \gg 0$, la méthode du gradient
converge si $\alpha \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$. De plus, il
existe une valeur optimale de α :

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

par lequel

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$

preuve: exercice (cf TDC)

Remarque: cette méthode sera
revue en optimisation. Elle

consiste à rechercher le minimum
de

$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$
par la méthode du gradient de
pas α .

TP Python: implémenter les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel (voire SOR) par l'exemple de la matrice du Laplacien discrétisé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

* Les 2 méthodes convergent et Gauss Seidel converge plus rapidement : retrouver numériquement ce résultat //

Jacobi : (boucles imbriquées sur k et i) 10

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{a_{ii}} \left(-a_{i,j+1} x_{k+1}^j - \dots - a_{i,j-1} x_{k+1}^{j-1} - a_{i,i+1} x_k^{i+1} - \dots - a_{i,i-1} x_k^{i-1} + b_i \right) \quad (1 < i \leq n)$$

Gauss Seidel :

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{a_{ii}} \left(-a_{i,j+1} x_{k+1}^j - \dots - a_{i,j-1} x_{k+1}^{j-1} - a_{i,i+1} x_{k+1}^{i+1} - \dots - a_{i,i-1} x_k^{i-1} + b_i \right) \quad (1 < i \leq n)$$

indice $k+1$