Séance 7 : recherche d'éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres)

* L'objectif consiste à rechercher l'ensemble (ou une partie) des valeurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ainsi (éventuellement) que des vecteurs propres associés.

* Dans tous les cas, il s'agit de méthodes numériques approchées (il se ramène mathématiquement à la recherche des racines d'un polynôme).

* Toutes les méthodes, y compris la notion de conditionnement, sont totalement distinctes des méthodes de résolution de systèmes linéaires.

* Ce problème a de nombreuses applications dans divers domaines (économie, mécanique, biologie, ...)

Exemples (voir site web)

→ l'algorithme Pagerank de Google (α)

→ le modèle de Leslie en dynamique des populations (α)

(α) méthode de la puissance

→ le modèle de Leontieff (TD7)

1) Conditionnement associé au problème

Déf : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ diagonalisable. On note $\Gamma(A)$ le conditionnement spectral de A associé à la norme subordonnée $|||\ |||$, le réel

$$\Gamma(A) = \inf_{(P \text{ tq } P^{-1}AP \text{ diagonale})} \left(\text{Cond}(P) \right)$$

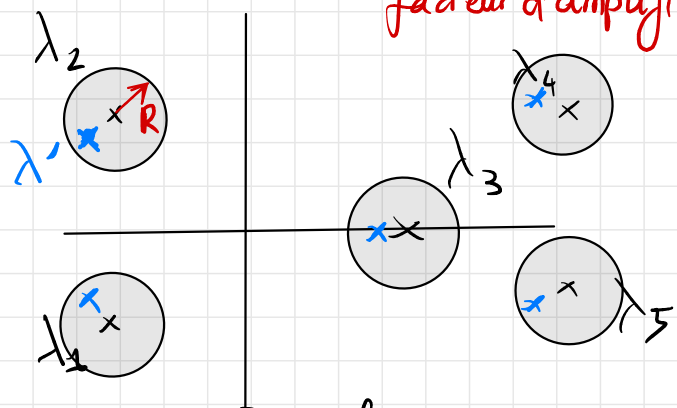
On a le résultat suivant qui justifie la définition de Γ :

Théorème : on suppose que $|||.|||$ est telle que $|||\text{diag}(d_1 \dots d_n)||| = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|$ (vrai pour les normes usuelles).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, de valeurs propres $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$. Soit $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$Sp_{\mathbb{C}}(A') \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\lambda_i, \Gamma(A)\, |||A' - A|||)$$

facteur d'amplification



preuve : voir poly de cours.

Remarques : 1) $\Gamma(A) \geq 1$

2) $\Gamma(A) = 1$ si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et avec $\|\ \|_2$

Ainsi, la matrice de Hilbert est très bien conditionnée pour le problème spectral.

On présente dans les chapitres suivants différentes méthodes spécifiques :

→ recherche de valeurs propres :

tout le spectre
- * Jacobi (si A symétrique)
- * QR (assez général)

une partie
- * Givens-Householder (A sym.)

→ recherche de vecteurs propres

- * méthode de la puissance (ou puissance inverse)

2) Méthode de Jacobi

Le principe de cette méthode consiste à transformer par matrices semblables orthogonalement, la matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en une matrice diagonale. Elle repose sur le Lemme suivant :

Lemme : soit $Q_{p,q}(\theta)$ la matrice de rotation :

$$Q_{p,q}(\theta)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & p & & q & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \cos\theta & & -\sin\theta & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \sin\theta & & \cos\theta & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $B = {}^tQ_{p,q}(\theta)\, A\, Q_{p,q}(\theta)$

Alors il existe $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ tq $b_{p,q} = b_{q,p} = 0$.

preuve voir poly. On trouve

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{acotan}\left(-\frac{a_{pp} - a_{qq}}{2\, a_{p,q}}\right).$$

Grâce au Lemme, on construit la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices symétriques :

$\rightarrow A_0 = A$

$\rightarrow A_{k+1} = {}^t Q_{p_k, q_k}(\theta_k)\, A_k\, Q_{p_k, q_k}(\theta_k)$

où (p_k, q_k) réalisent le maximum de $|(A_k)_{p,q}|$ par $p \neq q$.

et θ_k donné par le Lemme.

On peut montrer (voir poly) que la suite (A_k) converge vers une matrice diagonale de la forme $\operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$ (où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: spectre avec multiplicité de A).

(Exercice : implémenter la méthode sur l'exemple du Laplacien discrétisé)

Remarque : si A possède des valeurs propres simples, alors on obtient aussi une approximations des vecteurs propres avec

$$Q_k = \prod_{j=1}^{k} Q_{p_j, q_j}(\theta_j)$$

3) Méthode QR

Il s'agit d'une méthode assez générale basée sur le principe de la décomposition QR, vue par la résolution de systèmes linéaires ($\sim 4n^3/3$ opérations)

Théorème : soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module distinct : $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ldots > |\lambda_n| \neq 0$

On suppose que $A = P\,\text{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n) P^{-1}$ et que P admet une décomposition LU.

On construit la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} * \; A_0 = A = Q_0 R_0 \\ * \; A_1 = R_0 Q_0 = Q_1 R_1 \\ * \; A_2 = R_1 Q_1 = \ldots \\ \vdots \\ A_{k+1} = R_k Q_k = Q_{k+1} R_{k+1} \end{cases}$$

Alors on a $\boxed{\lim (A_k)_{ii} = \lambda_i \quad \text{et} \quad \lim (A_k)_{ij} = 0}$ (si $i > j$)

* preuve : voir [Ciarlet]

(Exercice : implémenter QR)

4) Méthode de Givens-Householder

Le principe général, pour rechercher une partie du spectre d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, consiste à :

→ transformer A en une matrice tridiagonale (avec les matrices de Householder)

→ construire une suite de Sturm de polynômes permettant de localiser les racines du polynôme caractéristique de la matrice A (démonstration complète dans [Ciarlet]).

5) Méthode de la puissance (et de la puissance inverse)

Il s'agit à présent d'approcher un vecteur propre associé à une valeur propre préalablement calculée (ou estimée).

La méthode de la puissance itérée se rencontre dans de nombreux exemples où on cherche à calculer un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre (en module) : (matrice de Google, modèle de Leslie)

Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisable et possédant une valeur propre de plus grand module : $|\lambda_n| \leq \dots \leq |\lambda_2| < |\lambda_1|$

On construit la suite $(r_k) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ tq :

* $r_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \left(\bigoplus_{i \neq 1} E_{\lambda_i} \right)$, $\|r_0\| = 1$
* $q_{k+1} = A r_k$ et $r_{k+1} = \dfrac{q_{k+1}}{\|q_{k+1}\|}$

Alors la suite (r_k) converge vers un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1

preuve :

$$r_0 = \underbrace{\tilde{u}}_{\in E_{\lambda_1} \setminus \{0\}} + \sum_{i=2}^{n} \underbrace{u_i}_{\in E_{\lambda_i}}$$

$$A r_0 = \lambda_1 \tilde{u} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i u_i$$

puis $r_1 = \dfrac{\lambda_1 \tilde{u} + \sum_i \lambda_i u_i}{\| \quad '' \quad '' \quad \|}$

$$= \frac{\tilde{u} + \sum_i \overbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)}^{<1} u_i}{\|\tilde{u} + \quad '' \quad \|}$$

et on obtiendra

$$\lim_{k \to +\infty} r_k = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} \quad //$$

La méthode de la puissance inverse étend la méthode précédente à une valeur propre quelconque :

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

On suppose avoir calculé une approximation $\tilde{\lambda}$ de λ tq

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| < \min_{\mu \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{\lambda\}} |\mu - \tilde{\lambda}|$$

($\tilde{\lambda}$ plus proche de λ que des autres vp)

Alors la suite (u_k) tq

$$\left\{ \begin{array}{l} * \ u_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \bigoplus_{\mu \neq \lambda} E_\mu(A) \\ * \ u_{k+1} = \underbrace{(A - \tilde{\lambda} I)}_{\text{inversible}}{}^{-1} u_k \end{array} \right.$$

"puissance inverse"

vérifie :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^k}{|\lambda - \tilde{\lambda}|^k} \frac{u_k}{\|u_k\|} \right) = q$$

preuve : reprendre la preuve précédente //

Exercices : études de textes (aspects mathématiques et numériques + implémentation)

→ matrice de Google

→ modèle de Leslie

Exercice 1 : implémenter la méthode de la puissance itérée et la tester sur différents exemples de votre choix :

- → Laplacien discrétisé
- → $A = \underbrace{P}_{\text{aléatoire}} D P^{-1}$ (à construire)

  au choix

- → ?