Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2021/2022
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n°1 : interpolation et approximation de fonctions

Exercice 1. Polynômes de Lagrange et de Hermite

Soit $\epsilon \in]0,1[$ et f une fonction C^3 sur $[0,1]$. On note

$$a = f(0), \quad b = f(1) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in]0,1[} |f^{(3)}(x)|.$$

a) Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points 0, ϵ et 1.

b) On note $E_1(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approxime $f(x)$ par $P_\epsilon(x)$. Donner une majoration de $|E_1(x)|$ en fonction de M.

c) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour chaque x de l'intervalle $[0,1]$,

$$\lim_{\epsilon -> 0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

d) Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant

$$P(0) = a, \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = b$$

Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f relativement aux points* $0, 1$ *et aux entiers* $1, 0$, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1.

e) On note $E_2(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approxime f par P. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ en fonction de M.

(Indication : considérer la fonction φ définie par $\varphi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)}t^2(t-1)$ pour $x \in]0,1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $\varphi^{(3)}(\xi) = 0$).

Exercice 2. Interpolation d'Hermite

i) Soit $\alpha_i, i = 1\ldots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in_3 [X]$ vérifiant les égalités :

$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

ii) Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathbb{R}_3[X], i = 1\ldots 4$ vérifiant les relations (**??**), avec respectivement :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1). \tag{2}$$

Montrer que le polynôme de la question 1 .s'écrit comme une combinaison linéaire de p_i :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, p_i(x). \tag{3}$$

iii) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question 1. avec :

$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1). \tag{4}$$

Montrer que pour chaque point $x \in]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in]0,1[$ où on a l'égalité :

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2. \tag{5}$$

Exercice 3. Fonctions paires et polynôme d'interpolation

i) Montrer que le polynôme d'interpolation d'une fonction paire f relativement aux points $\{-2,-1,0,1,2\}$ est pair.

ii) Soit la fonction définie sur $[-2,2]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En posant $u = x^2$, montrer que le calcul du polynôme d'interpolation $P(x)$ de f relativement aux zéros de T_5 peut se ramener au calcul d'un polynôme d'interpolation $q(u)$ de degré plus petit.

iii) Donner une expression de $q(u)$ puis en déduire une expression de $P(x)$.

Exercice 4.

Soit f une fonction dans $C^\infty([a,b],)$ et P_n son polynôme d'interpolation de Lagrange en $(n+1)$ points uniformément répartis sur $[a,b]$.

i) Rappeler l'estimation obtenue de l'erreur $f(x) - P(x)$ en $x \in [a,b]$.

ii) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[2,3]$. Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n précédemment défini converge uniformément sur $[2,3]$ vers f lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Etude de l'erreur d'interpolation pour des points équidistants

Soit p_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f définie sur $[a,b]$ de , relativement à $n+1$ points $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ de cet intervalle. Afin d'estimer l'erreur d'interpolation

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\,\pi_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(\xi_x), \qquad \pi_{n+1}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n),$$

nous nous proposons de calculer une majoration de $|\pi_{n+1}(x)|, x \in [a,b]$ pour différents choix de la répartition des points d'interpolation.

Lorsque les points d'interpolation sont équidistants, on a

$$|\pi_{n+1}(x_0 + sh)| = h^{n+1} \underbrace{|s(s-1)\cdots(s-n)|}_{\phi(s)}.$$

- Montrer que $\phi(s)$ atteint son maximum en un point $s_n \in]0,1[$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.
- Montrer que $\phi(s_n) \leq \dfrac{C_1}{\ln n}\, n!$, où C_1 est une constante positive.
- En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, montrer qu'il existe $C_2 > 0$ tel que

$$|\pi_{n+1}(x)| \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}\,\ln n}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}.$$