Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2021/2022
Modélisation et Méthodes Numériques
http ://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html

TD n°11 : Equations différentielles, consistance, stabilité, convergence, ordre

Exercice 1. Soit le problème de Cauchy $y' = f(t,y), y(0) = y_0$, avec $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalement Lipschitzienne par rapport à y, uniformément en t. Etudier la consistance et la stabilité de la méthode (dite de Heun) :

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2}f(t_n, y_n) + \frac{1}{2}f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))\right], \quad \text{où} \quad t_n = nh, h = T/N.$$

Exercice 2.

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [0,T] \\ y(0) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où f est C^2 de $[0,T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L.

Soit a un paramètre fixé dans $[0,1]$. Etudier, en fonction de a, la consistance, la stabilité et l'ordre de la méthode suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + ah, y_n + ahf(t_n, y_n)), \quad \text{où} \quad t_n = nh, h = T/N.$$

Exercice 3. On étudie la méthode numérique (M) de résolution de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ définie par

$$(M) \quad \begin{cases} y_{n+1} &= y_n + h_n\phi(x_n, y_n, h) \\ \phi(x,y,h) &= \alpha f(x,y) + \beta f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x,y)) + \gamma f(x+h, y+hf(x,y)), \end{cases}$$

où α, β et γ sont des réels compris entre 0 et 1.

i) Dans cette question et la suivante on supposera que la fonction $f(t,y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[t_0, t_0 + a] \times \mathcal{R}$ et vérifie une condition de Lipschitz globale. Pour quelles valeurs de (α, β, γ) la méthode proposée est-elle stable ?

ii) Quelles relations doivent satisfaire (α, β, γ) pour que la méthode soit
• consistante ? • convergente ? • d'ordre 1 ? • d'ordre 2 ?

iii) La méthode (M) peut-elle être d'ordre supérieur à 2 ?

Exercice 4. On s'intéresse à nouveau au problème de Cauchy, noté (1) dans le cours, où f est C^4 de $[0,T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère le schéma numérique à pas constant $h = \frac{T}{N}$ suivant :

$$y_{n+1} = y_n + hF(nh, y_n, h)$$

avec

$$F(t,x,h) = f(t,x) + haf^{[1]}(t,x) + h^2 b f^{[2]}\left(t + \alpha h, x + \beta h f(t,x)\right)$$

où α, β, a et b sont des paramètres à déterminer.

i) On suppose que $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$ (dérivées totales de f première et seconde) sont aussi Lipschitziennes par rapport à x uniformément en t avec constantes L_1 et L_2 respectivement. Démontrer qu'il existe une constante $\Lambda > 0$ indépendante de h telle que

$$|F(t,x,h) - F(t,x^*,h)| \leq \Lambda |x - x^*|$$

pour tous x et x^* dans $\mathbb{R}$.

ii) Déterminer les coefficients α, β, a et b de manière que la méthode à un pas définie par la méthode construite soit d'ordre 4.