Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2021/2022
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD/TP n°6 : méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1.
Implémenter la méthode de Jacobi et Gauss Seidel avec le langage de votre choix et montrer que les deux méthodes convergent sur le cas de la matrice du Laplacien discrétisé. Comparer les deux vitesses de convergence.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$.
1) La matrice A est-elle définie positive ?
2) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
3) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
1) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
2) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 4. Méthode du gradient à pas constant Soient A une matrice carrée d'ordre n, inversible, dont toutes les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) sont réelles et b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. On désigne par x la solution du système linéaire $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^n$ est donné et par $\lambda_1, .., \lambda_n$ les valeurs propres de A.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^0 \text{donné}, \qquad x^{(k+1)} \;=\; x^k - \alpha r_k \\ \text{où } r_k = A(x^{(k)}) - b \end{array} \right. \tag{1}$$

1) Déterminer la matrice $B_\alpha \in \mathbb{R}^{n,n}$ et le vecteur c tels que

$$x^{(k+1)} = B_\alpha x^{(k)} + c$$

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la méthode (I) converge, en fonction des $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$.
3) Montrer que si les valeurs propres de A ne sont pas de même signe, la méthode ne converge pas.
4) On suppose dans la suite de l'exercice que toutes les valeurs propres de A sont positives.

a) Montrer que la méthode converge si et seulement si $0 < \alpha < C$ où C est à déterminer en fonction des valeurs propres de A.

b) On pose $f_i : \alpha \in \mathbb{R}^+ \to f_i(\alpha) = |1-\alpha\lambda_i|$. Représenter graphiquement les courbes des $f_1, .., f_n$ sur une même figure.

c) En déduire le paramètre α optimal, noté α_{opt}, pour lequel la méthode converge la plus vite.

d) On suppose que A est symétrique. Calculer alors, $\rho(B_{\alpha_{\text{opt}}})$, en fonction de $k_2(A)$ (conditionnement de la matrice A pour la norme $\|\| \cdot \|\|_2$). Que dire de la méthode si la matrice A est mal conditionnée ?