

TD/TP n°9 : Equations différentielles, méthode d'Euler

Exercice 1.

On souhaite appliquer la méthode d'Euler pour approcher la solution de l'équation différentielle suivante sur $[0, 1]$:

$$y'(t) = -150y(t) + 50$$

avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{3}$.

- i) En prenant une subdivision régulière de 100 points et une valeur initiale $y_0 = 0.3$, que vaut la valeur approchée obtenue pour $y(1)$ par cette méthode? On pourra remarquer que la suite étudiée est de type arithmetico-géométrique.
- ii) Comparer avec la valeur exacte et commenter le résultat. Quel nombre de points préconisez vous pour obtenir une bonne approximation de $y(1)$?

Exercice 2.

Implémenter la méthode d'Euler explicite dans un cadre général puis l'appliquer sur l'exemple d'une EDO d'ordre 1 affine à coefficients constants pour laquelle la solution exacte est connue. Illustrer graphiquement la convergence d'ordre 1 de la méthode, c'est à dire en $O(\frac{1}{n})$ pour n subdivisions sur un segment donné.

Exercice 3. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé.} \end{cases} \quad (1)$$

L'existence et l'unicité de $y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^m)$ vérifiant (1) sont bien assurées en supposant par exemple que la fonction f est continûment différentiable de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^m et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L pour la norme choisie sur \mathbb{R}^m :

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \quad \forall (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^m)^2, \quad \|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq L\|y_2 - y_1\|$$

- i) Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $\Delta T = \frac{T}{N}$. Montrer, en utilisant un théorème de point fixe rappelé clairement, que si $\Delta T L < 1$ la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suivante :

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé,} \\ y_{n+1} = y_n + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

est bien définie (on parle de la méthode d'Euler implicite).

ii) On note $t_n = t_0 + n\Delta T$ et $e_n = y_n - y(t_n)$. Montrer que

$$\|e_{n+1}\| \leq (1 + \Delta T L_1)(\|e_n\| + \|\epsilon_n\|)$$

où $L_1 = \frac{L}{1-L\Delta T}$ et ϵ_n désigne l'erreur de consistance :

$$\epsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

iii) En déduire

$$e_n \leq e^{L_1 n \Delta T} e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1(n-1-i)\Delta T} (1 + \Delta T L_1) \epsilon_i$$

puis la convergence de la méthode d'Euler implicite :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty, y_0 \rightarrow y(t_0)} \left(\max_{0 \leq n \leq N} e_n \right) = 0$$

(pour simplifier, on pourra supposer que f est C^1 et en déduire une majoration de ϵ_n en $O(\Delta T)^2$).

Implémenter la méthode d'Euler implicite dans un cadre général puis l'appliquer sur l'exemple d'une EDO d'ordre 1 non linéaire, par exemple :

$$y'(t) = \cos(y(t))$$

Comparer le résultat obtenu avec la méthode d'Euler explicite.