Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2022/2023
Modélisation et Méthodes Numériques
http ://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html

TD n°8bis Polynômes orthogonaux

Exercice 1. Polynômes orthogonaux

Soit $]a,b[$ un intervalle, borné ou non, de $\mathbb{R}$. Par définition, un *poids* w est une fonction continue, positive $w :]a,b[\to]0,+\infty[$ avec la propriété suivante : l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |x|^n\, w(x)\, dx$ est convergente pour tout entier n.

L'espace vectoriel (E) des fonctions f continues sur $]a,b[$, telles que :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, w(x)\, dx} < +\infty,$$

sera muni du produit scalaire naturel :

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\, w(x)\, dx.$$

a) Montrer qu'il existe une suite unique de polynômes unitaires (p_n), $\deg(p_n) = n$, orthogonaux pour un poids donné w. Montrer que les polynômes p_n vérifient la relation de récurrence :

$$p_n(x) = (x - \lambda_n)\, p_{n-1}(x) - \mu_n\, p_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

avec

$$\lambda_n = \frac{< xp_{n-1}, p_{n-1} >}{\|p_{n-1}\|_2^2}, \qquad \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|_2^2}{\|p_{n-2}\|_2^2}.$$

b) Montrer que les polynômes p_n sont scindés à racines simples, toutes dans $]a,b[$.

Exercice 2. Polynômes deTchebichev

a) Montrer que les polynômes de Tchebichev $t_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1,1]$ sont deux à deux orthogonaux, relativement au poids $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Montrer que les polynômes t_n vérifient la relation de récurrence :

$$t_{n+1}(x) = 2x\, t_n(x) - t_{n-1}(x)$$

Exercice 3. Polynômes de Legendre On pose $(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)g(x)$ et pour tout entier n on définit le polynôme P_n par

$$Q_n(X) = (X^2-1)^n,\ P_n(X) = \frac{n!}{(2n)!} Q_n^{(n)}.$$

i) Déterminer le degré de P_n ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

ii) Justifier que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

iii) En utilisant la formule de Leibnitz, déterminer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

iv) Déterminer les racines de Q_n ainsi que leur multiplicité.

v) Montrer que P_n a au moins n racines dans l'intervalle $]-1,1[$.

vi) Donner le nombre exact de racines de P_n ainsi que leur multiplicité.

vii) Etablir que $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a :

$$\int_{-1}^{1} P^{(n+1)}(t)Q(t)\,dt \;=\; \sum_{k=0}^{n} \Big[P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\Big]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} P(t)Q^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{1}$$

viii) En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)\,dt \;=\; 0$