

*TD n°9 : Equations différentielles, méthode d'Euler*

**Exercice 1.** Soit le système différentiel dans  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases}$$

- i) Déterminer la solution du système précédent qui passe par le point  $(x_0, y_0)$  au temps  $t = 0$ .
- ii) On utilise la méthode d'Euler explicite pour approcher la solution exacte sur un intervalle  $[0, T]$  avec pas constant  $h = \frac{T}{N}$ , démarrant au temps  $t_0 = 0$ . Soit  $(x_n, y_n)$  le point atteint au temps  $t_n = nh$  ( $n \in [0, N]$ )
  - (a) Ecrire la relation qui lie  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  à  $(x_n, y_n)$ .
  - (b) Calculer explicitement  $(x_n, y_n)$  en fonction de  $n, h, x_0, y_0$ . On pourra utiliser la suite auxiliaire  $z_n = \frac{x_n}{(1 + 2h)^n}$ .
  - (c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée converge vers la solution exacte au sens suivant :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max(\{|x_n - x(t_n)|, 0 \leq n \leq N\}) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \max(\{|y_n - y(t_n)|, 0 \leq n \leq N\})$$

**Exercice 2.**

On souhaite appliquer la méthode d'Euler pour approcher la solution de l'équation différentielle suivante sur  $[0, 1]$  :

$$y'(t) = -150y(t) + 50$$

avec la condition initiale  $y(0) = \frac{1}{3}$ .

- i) En prenant une subdivision régulière de 100 points et une valeur initiale  $y_0 = 0.3$ , que vaut la valeur approchée obtenue pour  $y(1)$  par cette méthode ? On pourra remarquer que la suite étudiée est de type arithmetico-géométrique.
- ii) Comparer avec la valeur exacte et commenter le résultat. Quel nombre de points préconisez vous pour obtenir une bonne approximation de  $y(1)$  ?

**Exercice 3.** Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé.} \end{cases} \quad (1)$$

L'existence et l'unicité de  $y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^m)$  vérifiant (1) sont bien assurées en supposant par exemple que la fonction  $f$  est continûment différentiable de  $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$  et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté  $L$  pour la norme choisie sur  $\mathbb{R}^m$  :

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \quad \forall (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^m)^2, \quad \|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq L\|y_2 - y_1\|$$

- i) Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On note  $\Delta T = \frac{T}{N}$ . Montrer, en utilisant un théorème de point fixe rappelé clairement, que si  $\Delta T L < 1$  la suite  $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$  suivante :

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé,} \\ y_{n+1} = y_n + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

est bien définie (on parle de la méthode d'Euler implicite).

- ii) On note  $t_n = t_0 + n\Delta T$  et  $e_n = y_n - y(t_n)$ . Montrer que

$$\|e_{n+1}\| \leq (1 + \Delta T L_1)(\|e_n\| + \|\epsilon_n\|)$$

où  $L_1 = \frac{L}{1 - L\Delta T}$  et  $\epsilon_n$  désigne l'erreur de consistance :

$$\epsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

- iii) En déduire

$$e_n \leq e^{L_1 n \Delta T} e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1(n-1-i)\Delta T} (1 + \Delta T L_1) \epsilon_i$$

puis la convergence de la méthode d'Euler implicite :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty, y_0 \rightarrow y(t_0)} \left( \max_{0 \leq n \leq N} e_n \right) = 0$$

(pour simplifier, on pourra supposer que  $f$  est  $C^1$  et en déduire une majoration de  $\epsilon_n$  en  $O(\Delta T)^2$ ).