

# JOUR 4 : calcul approché d'intégrales

## 1) Problème à résoudre

On cherche à calculer, ou plus exactement approcher l'intégrale :

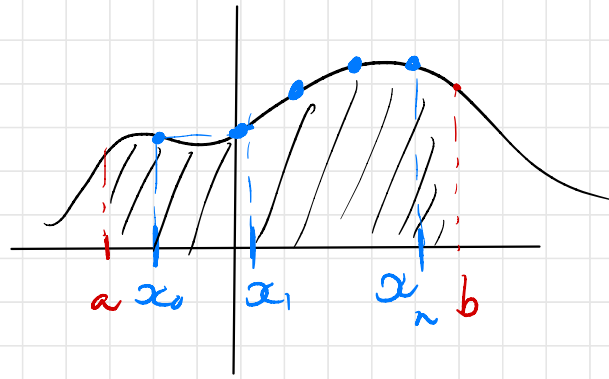
$$I = \int_a^b f(x) w(x) dx$$

( $w$  : poids  $\geq 0$ ,  $C^0$  sur  $]a, b[$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ )

par une somme finie :

$$I \approx \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \quad (*)$$

où  $(x_i) \in (\mathbb{R}, b[$  points (distincts) 1  
 $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$  : poids | fixés par tout f.



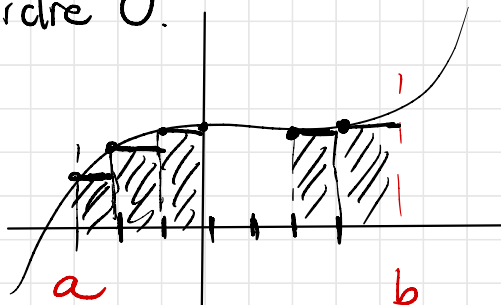
Exemples :

→ rectangles à gauche :  
$$I \approx \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n+1} (b-a) \frac{1}{n} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$
  
→ trapèzes, etc...

Pour définir la précision de la méthode, on définit son ordre :

\* def on dit qu'une méthode de quadrature de type  $(*)$  est d'ordre  $N \in \mathbb{N}$  si elle est exacte par tous les polynômes de degré  $\leq N$ .

\* exemple : \* la méthode des rectangles est d'ordre 0.



\* la méthode des trapèzes est d'ordre 1.

On verra par la suite comment déterminer l'ordre d'une méthode et le relier à la précision.

On présente ici 2 types de méthodes :

→ méthodes composées (parmi lesquelles on retrouve : rectangles, trapèzes, ...)

→ méthodes de Gauss

Remarque : on exige que les méthodes construites vérifient :

$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$   
par assurer un bon conditionnement par rapport aux erreurs d'arrondis sur  $f$ .

## 2) Méthodes composées

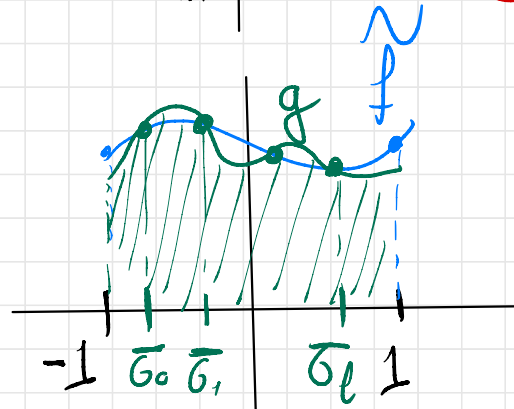
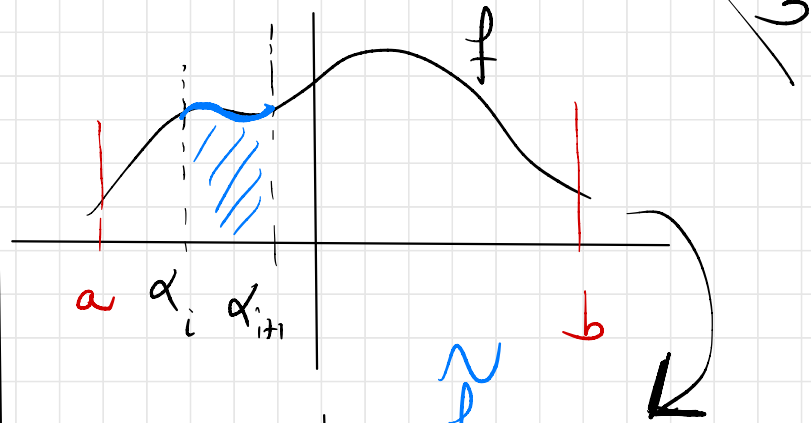
Dans cette partie, on suppose que  $w(x) = 1$   
et  $(a, b) \in \mathbb{R}$ .

L'idée consiste à calculer  $I$  en  
2 temps :

→ en subdivisant  $[a, b]$  en  $l$  sous-  
intervalles et en ramenant ceux-ci à  $[-1, 1]$

→ en calculant

$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx$  à l'aide d'un change-  
ment de variable affine par se ramener à  $[-1, 1]$   
puis avec une interpolation de Lagrange  
sur des points  $(\bar{\sigma}_i)_{0 \leq i \leq l} \in [-1, 1]$



$g$  : interpolée de Lagrange de  $f$   
aux points  $\{\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_l\}$

On a

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \left( \alpha_{i+1} - \alpha_i \right) f(x_i) \quad (\text{Chasles})$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i+1}) + \left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2}\right)y\right) dy$$

$$\approx \sum_{i=0}^k \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{f(\tau_j)}_{\tilde{f}(y)} \underbrace{l_j(y)}_{\tilde{g}(y)} dy$$

$$\approx \sum_{i,j=0}^k \underbrace{\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2}}_{\text{poids}} \left( \int_{-1}^1 l_j(y) dy \right) \underbrace{f(\alpha_{i,j})}_{\text{points}}$$

où  $\alpha_{i,j} = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i+1}) + \left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2}\right)\tau_j$

Il s'agit bien d'une formule <sup>4</sup> de type (\*) avec

$(k+1) \cdot (l+1)$  points.  
 ( $l_j$  désigne le  $j$ ème polynôme de base de Lagrange associé aux points  $\{\tau_0, \dots, \tau_l\}$ ).

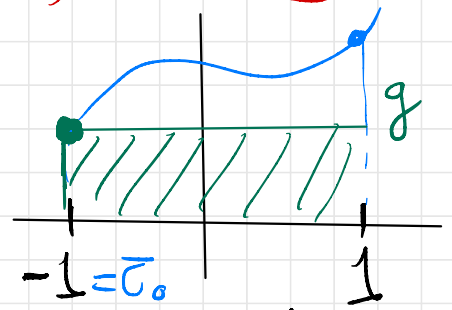
Remarque : la formule élémentaire :

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 \sum_{j=0}^l g(\tau_j)$$

où  $\omega_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 l_j(y) dy$  est la formule élémentaire associée à la formule composée construite.

2 Exemples :

→  $l=0, \tau_0=-1$



$\omega_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 dy = 1$

et  $\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2g(-1)$  : rectangles à gauche

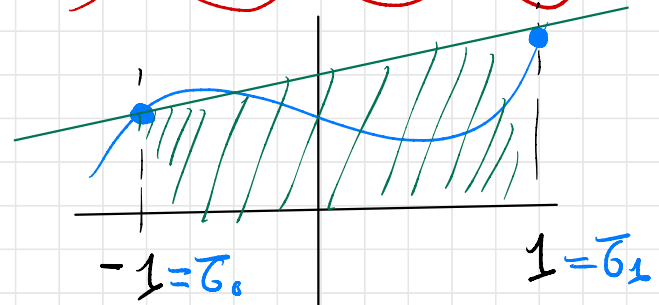
→  $l=0, \tau_0=0$  . On trouve  $\omega_0=1$   
et  $\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2g(0)$  : point milieu

→  $l=0, \tau_0=1$

on trouve  $\omega_0=1$  et

$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2g(1)$  : rectangles à droite

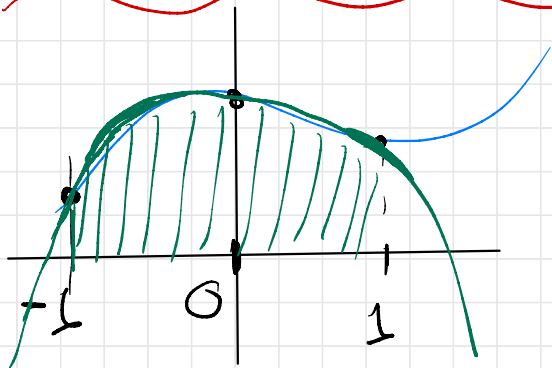
→  $l=1, \tau_0=-1, \tau_1=1$



$\omega_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (y-1) dy = \frac{1}{2}$

$\omega_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (-1-1) dy$  , soit la méthode des trapèzes :  
 $\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 \cdot \left( \frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2} f(1) \right)$

$$\rightarrow l=2, \tau_0=-1, \tau_1=0, \tau_2=1$$



On trouve  $w_0 = \frac{1}{6}$ ,  $w_1 = \frac{4}{6}$ ,  $w_2 = \frac{1}{6}$   
 soit la formule de Simpson :

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 \left( \frac{1}{6} g(-1) + \frac{4}{6} g(0) + \frac{1}{6} g(1) \right)$$

Plus généralement, pour tout  $l \geq 0$ ,  
 on peut définir la famille des méthodes  
 de Newton-Cotes fermées avec :

$$\tau_j = -1 + \frac{2j}{l} \quad (0 \leq j \leq l)$$

\*  $l=1$  : trapèzes

\*  $l=2$  : Simpson

\*  $l=4$  : Boole-Villarceau :

$$(\tau_j)_{0 \leq j \leq 4} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$er \quad (w_j)_{0 \leq j \leq 4} = \left\{ \frac{7}{90}, \frac{16}{45}, \frac{2}{15}, \frac{16}{45}, \frac{7}{90} \right\}$$

\*  $l=6$  : Weddle-Hardy

\*  $l > 6$  : certains  $w_j$  sont négatifs.

L'ordre des méthodes composées est donné par le résultat suivant :

Théorème : l'ordre d'une méthode composée est au moins égal à  $l$ . Il est égal à  $l+1$  dans le cas des méthodes de Newton - (elles fonctionnent) si  $l$  est pair.

preuve : voir poly (ou [Demailly])

\* Exemple :

→ rectangles (gauche ou droite) :	0
→ point milieu :	1
→ trapèzes :	1

→ Simpson : 3

→ Boole-Villarceau : 5

→ Weddle-Hardy : 7

7

Il existe un lien entre l'ordre de la méthode et sa précision.

Au paravant, on s'assure que toutes les méthodes composées sont convergentes en un certain sens :

Théorème une méthode composée est telle que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} I_{h,k} = I \quad (\bar{a} \text{ fixe})$$

$h_k = \max_{0 \leq i \leq k} |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$

preuve: on utilise la définition de l'intégrale de Riemann

La vitesse de convergence est reliée à l'ordre de la méthode:

Théorème: soit une méthode composée d'ordre  $N$ . Soit  $f$  tq  $f \in C^{N+1}([a,b], \mathbb{R})$ . On a

$$|\mathcal{I}_k f - \mathcal{I}| \leq C_N (b-a) \delta \left\| f^{(N+1)} \right\|_{\infty}$$

où  $\delta = \max_{0 \leq i \leq k} |x_i - x_{i-1}|$  (pas de la subdivision)

(convergence en  $O(\delta^{N+1})$ )

Exemple: la méthode des trapèzes / 8 avec  $(n+1)$  pts converge en  $O(\frac{1}{n^2})$  par une subdivision régulière (centre  $O(\frac{1}{n})$  par les rectangles ou  $O(\frac{1}{n^4})$  par Simpson).

(Erreur:  $10^{-6}$ )

$10^6$ pts rectangles
$10^3$ pts trapèzes
4000 pts Simpson

→ Implémentation Python de différentes méthodes composées avec vérification de la vitesse de convergence



### 3) Méthodes de Gauss

On reprend le problème posé au §1 en essayant à présent de construire une méthode d'ordre le plus élevé possible par un nombre donné,  $n+1$ , de points  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ .

Par cela, on a besoin de quelques propriétés sur les familles de polynômes orthogonaux associées au poids  $w$ .

Théorème : soit  $w$  un poids sur  $]a, b[$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} * w(x) > 0 \quad \forall x \in ]a, b[ \\ * \int_a^b x^n w(x) dx < +\infty \end{array} \right.$$

Il existe une unique famille de polynômes  $\{P_0, \dots, P_n, \dots\}$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} * d^{\circ} P_n = n \quad (n \geq 0) \\ * P_n \text{ est unitaire (coeff. dominant} = 1) \\ * \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \end{array} \right.$$

$$\langle P_n, Q \rangle = \int_a^b P_n(x) Q(x) w(x) dx = 0$$

on parle de la famille des polynômes orthogonaux associée au poids  $w$   
preuve : basée sur orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Exemples :

→  $[a, b] = [-1, 1]$  et  $w(x) = 1$  :  
on parle des polynômes de Legendre.

→  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

on parle des polynômes de Tchebychev

→  $[a, b] = [0, +\infty[$ ,  $w(x) = e^{-x}$

on parle des polynômes de Laguerre

→  $[a, b] = ]-\infty, +\infty[$ ,  $w(x) = e^{-x^2}$

on parle des polynômes de Hermite

→ voir TD8 bis (préparés des polynômes orthogonaux)

Pour le problème présent, on utilise  $\searrow 10$   
une propriété particulière de ces polynômes :

Théorème on note  $\{P_0, P_1, \dots\}$  la famille des polynômes orthogonaux associée au poids  $w$ . Alors, le polynôme  $P_n$  est scindé, à racines simples, toutes dans  $]a, b[$ .

preuve (voir poly ou [Demailly])

A présent, on énonce le résultat fondamental ~~indiquant~~ la méthode de quadrature d'ordre maximal à  $n$  fixé :

Théorème : il existe une unique méthode de quadrature à  $(n+1)$  pts :

$$\int_a^b f(x) \omega(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$$

qui soit d'ordre  $2n+1$ .

\* Les points  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  sont les  $(n+1)$

racines du polynôme orthogonal  $P_{n+1}$  associé au poids  $\omega$ .

\* Les poids  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$  sont tels que :

$$\lambda_i = \int_a^b l_i(x) \omega(x) dx \quad \text{ou}$$

(li)  $\{l_i\}_{0 \leq i \leq n}$  famille des polynômes de base d'interpolation

de Lagrange associée aux  $(n+1)$  pts  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ .

On a de plus

$$\lambda_i \in \{0, \dots, n\}, \lambda_i > 0.$$

preuve :

\* Unité : soit une méthode de quadrature à  $(n+1)$  pts. On note

$$P_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

On a  $d^{\circ} P_{n+1} = n+1$

\*  $P_{n+1}$  unitaire et

$$\langle P_{n+1}, Q \rangle = \int_a^b P_{n+1}(x) Q(x) \omega(x) dx.$$

$\uparrow$   
 $d^{\circ} \leq n$                        $d^{\circ} \leq 2n+1$

Comme la méthode est exacte pour

$\tilde{P}_{n+1} Q$ , on a

$$\langle \tilde{P}_{n+1}, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i (\tilde{P}_{n+1} Q)(x_i) = 0 //$$

$\tilde{P}_{n+1}$  est bien égal à  $P_{n+1}$  et

on a l'unicité des  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$

\* Comme la méthode est exacte

par  $l_i$ , on a :

$$\int_a^b l_i(x) \omega(x) dx = \lambda_i + 0$$

et on a l'unicité des  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$

\* Réciproquement, la méthode proposée | 2  
est bien d'ordre  $2n+1$ . En effet

$\rightarrow$  elle est d'ordre  $\geq n$  car si

$Q \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$Q(b) = \sum_{i=0}^n Q(x_i) l_i(x) \text{ et}$$

$$\int_a^b Q(x) \omega(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q(x_i)$$

par définition des  $(\lambda_i)$ .

$\rightarrow$  soit  $Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ . On a

par la division euclidienne :

$$Q(x) = \underbrace{M(x)}_{d^0 \leq 2n+1} \underbrace{\prod_{i=0}^{n+1} (x-x_i)}_{\substack{d^0 \leq n \\ P_{n+1}}} + \underbrace{R(x)}_{d^0 \leq n}$$

On a

$$\int_a^b Q(x) w(x) dx = \int_a^b M(x) \frac{P_{n+1}(x)}{n+1} w(x) dx + \int_a^b R(x) w(x) dx$$

et

$$\sum_{i=0}^n Q(x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i R(x_i)$$

Or,  $\int_a^b \underbrace{P_{n+1}(x)}_{d \leq n} \underbrace{M(x) w(x)}_{\text{(orthogonalité)}} dx = 0$

et  $\int_a^b R(x) w(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i R(x_i)$   
 (méthode exacte par R)

→ méthode exacte par Q //

On a de plus

$$\int_a^b \underbrace{L_i^2(x)}_{d=2n} w(x) dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j \underbrace{L_i^2(x_j)}_{= \lambda_i}$$

⇒  $\lambda_i > 0$  //

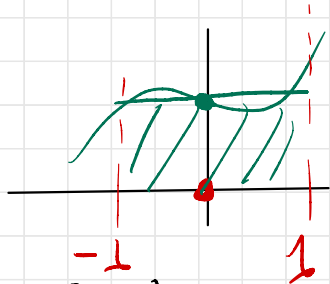
On parle des méthodes de Gauss  
 (- Lagrange, Tchebychev, ...)

Exemples

→  $[a, b] = [-1, 1]$ ;  $w(x) = 1$

On parle des méthodes de Gauss-Legendre :

\*  $n=0$  :  $p_0 = 0$   
 $\lambda_0 = 2$   
 (pt milieu d'ordre 1)



\*  $n=1$  :  $p_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}$   
 (  $\int_{-1}^1 p_1 dx = \int_{-1}^1 x p_1 dx = 0$  )

d'où  $\left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \lambda_0 = 1 \\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \lambda_1 = 1 \end{array} \right.$

et  $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

d'ordre 3 //  
 (à comparer avec Simpson)

\*  $n=2$  : 3 pts  $\Rightarrow$  ordre 5

$\rightarrow \prod_{a \neq b} [ = ]_{-1,1} [ , w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Méthode de Gauss - Tchebychev  
 dont on trouve une expression explicite :

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\right)\right)$$

d'ordre  $2n+1$  //

On peut démontrer le résultat  
 suivant de convergence (avec vitesse  
 associée) des méthodes de Gauss :

Théorème : Sur la méthode de Gauss associée au poids  $w$ .

$G_n w$

---

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) = \int_a^b f(x) w(x) dx$$

(si  $f \in C^0$ ).

De plus, en notant  $E(f)$  l'erreur commise

$$|E(f)| \leq \frac{C_n}{(2n+2)!} \|f\|_{\infty}$$

(si  $f \in C^{2n+2}$ )

où  $C_n = \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i)^2 w(x) dx$ .