JOUR 6 : Résolution numérique d'équations différentielles : méthodes d'Euler

1) Introduction et notations

Le problème qu'on souhaite résoudre numériquement est ~~de~~ le problème de Cauchy :

$$(1)\quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in [0, T]) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

où $f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ et $y : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, C^1.

Afin d'avoir existence et unicité du problème (1), on impose les conditions suivantes sur f :

* $f \in \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$
* f est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable :

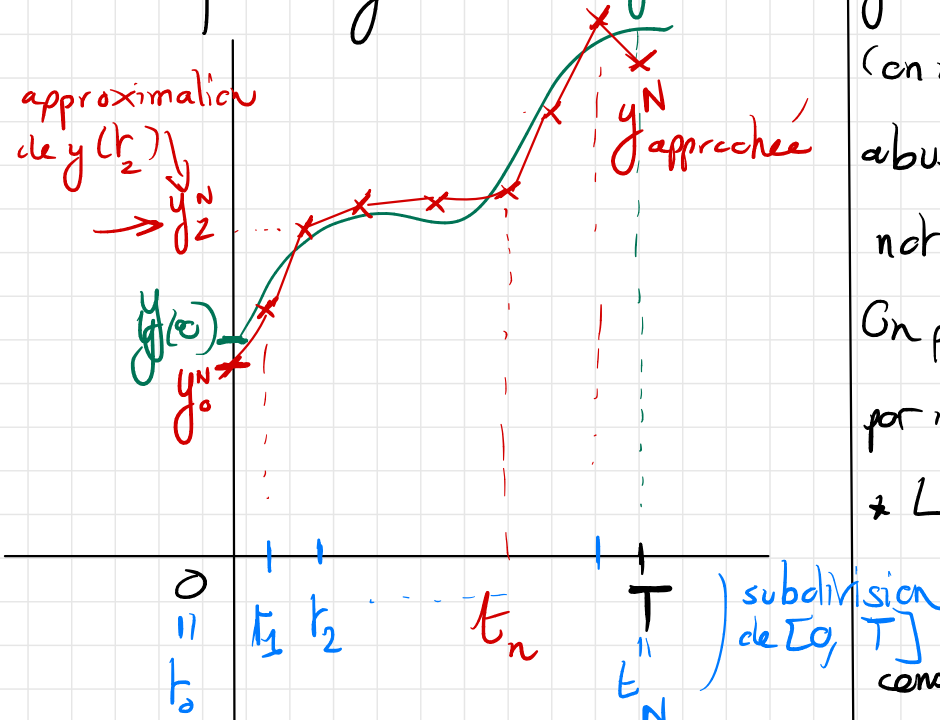
$\exists L > 0$ tq $\forall (t, y_1, y_2) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$\| f(t, y_2) - f(t, y_1) \| \leq L \| y_2 - y_1 \|$$

Sous ces hypothèses, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution de (1).

1

Dans la plupart des cas, il n'existe pas de solution exacte explicite. On cherche donc à construire une approximation numérique de y.



à N fixé (subdivision de $[0,T]$ formée de $N+1$ pts), on construit les approximations successives $y_0^N, y_1^N, \dots, y_N^N$ de $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N)$.

(on notera ces approximations $y_0, \dots, y_N$, par abus de langage, afin de simplifier les notations).

On peut construire la fonction $y^N : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ par interpolation affine par morceaux.

* Une méthode de résolution approchée consiste à donner la construction de $\{y_0, \dots, y_N\}$ pour tout $N \geq 1$

On va étudier ici la famille générale des méthodes à un pas :

$$(P) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)\,\Phi(t_n, y_n, t_{n+1} - t_n) & n \in \{0, \dots N-1\} \\ y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} & (2) \end{cases}$$

où $\Phi : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$

* L'objectif est de construire des méthodes convergente, ~~telles~~ que $y^N \longrightarrow y$, lorsque $N \longrightarrow +\infty$, en un sens à préciser.

2) Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler consiste à approcher $y(t_n)$ à l'aide de la formule intégrale exacte :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\,ds$$

et de la méthode des rectangles à gauche :

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y(t_n))$$

On propose alors le schéma suivant :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)\, f(t_n, y_n) & (n \in \{0, \dots, N-1\}) \\ y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases} \quad (3)$$

On parle de la méthode d'Euler explicite.

Il s'agit d'une méthode à un pas où

$$\Phi(t, y, h) = f(t, y)$$

$(t \in [0, T],\ y \in \mathbb{R}^m,\ h \in [0, T])$

La méthode d'Euler explicite est convergente au sens suivant :

Théorème : on note $e_n = y_n - y(t_n)$ (erreur commise en t_n) et on note $\delta = \max\limits_{0 \leq i \leq N} (t_{i+1} - t_i)$ le pas de la subdivision. On a alors

$$\|e_n\| \leq \frac{e^{nL\delta} - 1}{L}\, \omega(\delta, y') + e^{nL\delta} \|e_0\|$$

où

$$\omega(\delta, g) = \max_{\|y - x\| \leq \delta} \|g(y) - g(x)\|$$

(module de continuité)

En particulier

$$\lim_{\substack{N \to +\infty \\ \delta \to 0 \\ y_0 \to y(t_0)}} \left(\max_{0 \leq n \leq N} \|e_n\| \right) = 0$$

Corollaire : ~~sanscales~~

$$\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \delta\to 0\\ y_0^\delta \to y(t_0)}} \| y^N - y \|_\infty = 0$$

(convergence uniforme)

(preuve : exercice, poly, ou [Demailly])

preuve du théorème : on va utiliser 2 Lemmes (dits de Gronwall discrets)

Lemme 1 (pas constant)

Soit (z_n) suite telle que

$$\begin{cases} z_0 \geq 0 \\ z_{n+1} \leq A z_n + B \end{cases}$$

où $A \geq 1$ et $B \geq 0$ fixés

On a alors

$$z_n \leq e^{nQ} z_0 + \frac{e^{nQ}-1}{Q} \cdot B \quad \text{où}$$

$Q = A - 1$.

(en effet,

$$z_n \leq A z_{n-1} + B \leq A^n z_0 + \frac{A^n - 1}{A-1} \cdot B$$

car $1 + Q \leq e^Q$

$$z_n \leq e^{nQ} z_0 + \frac{e^{nQ}-1}{Q} B$$

car $A \leq Q + 1 \leq e^Q$)

Lemme 2 (pas variable)

Soit (z_n) la suite telle que

$$\begin{cases} z_0 \geq 0 \\ z_{n+1} \leq (1 + \underbrace{h_n}_{\geq 0}) z_n + \underbrace{\alpha_n}_{\geq 0} \end{cases}$$

6

Alors, on a :

$$z_n \leq e^{\ldots} z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{(t_n - t_{i+1})} \alpha_i$$

(preuve : exercice)

Retour à la preuve du théorème :

on écrit

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\, ds \\ \text{et} \\ y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n) \end{cases}$$

et on soustrait puis on majore :

$$e_{n+1} = e_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n)) + f(t_n, y(t_n)) - f(s, y(s)) \right] ds$$

puis :

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\| + \delta L \|e_n\| + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \| \underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{y'(t_n)} - \underbrace{f(s, y(s))}_{y'(s)} \| \, ds$$

d'où

$$\|e_{n+1}\| \leq \underbrace{\|e_n\| + \delta L \|e_n\|}_{(1+\delta L)\|e_n\|} + \delta \omega(y', \delta)$$

Avec le Lemme 1, on trouve :

$$\|e_n\| \leq e^{n\delta L} \|e_0\| + \frac{e^{n\delta L} - 1}{\cancel{\delta} L} \cdot \cancel{\delta}\, \bar{\omega}(y', \delta)$$

Quand $\begin{cases} N \to +\infty \\ \delta \to 0 \\ y_0 \to y(t_0) \end{cases}$, on a

$$\bar{\omega}(y', \delta) \to 0 \text{ car } y' \text{ est } C^0$$

//

sur $[0,T]$ compact, donc uniformément continue. Ainsi

$$\max_{0\le n\le N-1} \|e_n\| \le e^{NL\delta}\underbrace{\|e_0\|}_{(y_0\to y(t_0))\ \downarrow\ 0} + \frac{e^{NL\delta}-1}{L}\underbrace{\omega(y',\delta)}_{\downarrow\ 0}$$

lorsque $y_0 \to y(t_0)$ et $\delta \to 0$

Pour obtenir une majoration de l'erreur lorsque $N \to +\infty$, il est nécessaire de supposer que f est C^1 (donc y' est C^1)

Dans ce cas $\omega(y',\delta) = O(\delta)$

Cela implique que si $y_0 = y(t_0)$, l'erreur $\max\limits_{0\le n\le N} \|e_n\|$ est $O(\delta)$

La vitesse est de même ordre que celle des rectangles à gauche (en $O\left(\frac{1}{N}\right)$ par une subdivision régulière à $N+1$ points)

Remarque :

le coefficient $e^{nL\delta}$ est majoré par $e^{N\delta L} \le e^{TL}$ dans le cas d'une subdivision régulière.

Le coefficient e^{LT} peut être très grand, et engendrer un mauvais conditionnement numérique.

Exercice 3) : implémentation de la méthode d'Euler explicite et vérification de sa vitesse de convergence

→ choix d'une EDO du type

$y' = ty$ et $y(0) = y_0$

(solution : $y(t) = y_0 e^{-t^2/2}$)

→ Implémentation de la méthode d'Euler sur un intervalle $[0, T]$ (subdivision régulière)

→ Vérification de la convergence de la méthode et de sa vitesse en $O\left(\frac{1}{N}\right)$

(à m'envoyer...)

Exercice 2 : conditionnement numérique de la méthode.

(pour quelle valeur de N choisir pour avoir un "bon" résultat)

(à faire)

On observe un mauvais conditionnement de la méthode d'Euler explicite sur l'exemple :

$$\begin{cases} y'(t) = -150\,y(t) + 50 \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(solution exacte : $y(t) = \frac{1}{3}$)

car $e^{LT} = e^{150}$ très grand !!

3) Méthode d'Euler implicite

Dans cette nouvelle méthode, on cherche à utiliser la méthode des rectangles à droite au lieu des rectangles à gauche :

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + (t_{n+1} - t_n) f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

soit :

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_{n+1}, y_{n+1})}$$

?

On parle de la méthode d'Euler implicite. Il est nécessaire au préalable de justifier sa construction

→ Exercice 3, (TD/TP n°9)

i) $\Delta T = T/N$ (subdivision régulière)

Mq si $\Delta T . L < 1$, la suite $\{y_1, \dots, y_N\}$ (Euler implicite) est bien définie :

(indication : th. du point fixe)

n fixé

$$F : \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ y \longmapsto y_n + \Delta T f(t_{n+1}, y) \end{array} \right)$$

est strictement contractante (constante $L\Delta T$) et possède donc un unique pt fixe sur $\mathbb{R}^m$, noté y_{n+1}.

(ii) Mq

$$\|e_{n+1}\| \le (1+\Delta T L_1)(\|e_n\| + \|\varepsilon_n\|)$$

où $L_1 = \dfrac{L}{1-L\Delta T}$ et

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

(à faire) en s'inspirant de la preuve de convergence de Euler explicite

(iii) en déduire

$$\|e_n\| \le e^{L_1 n \Delta T}\|e_0\| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1(n-i-1)\Delta T}(1+L_1\Delta T)\|\varepsilon_i\|$$

(=> Lemme n° 2 déjà vu)

(iv) en déduire la convergence :

$$\lim \left(\max_{0\le n\le N} \|e_n\|\right) = 0$$

$\begin{cases} N \to +\infty \\ y_0 \to y(t_0) \end{cases}$

On suppose f C^1 (par simplifier)

On a alors

$$\|\varepsilon_n\| = \|y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T y'(t_{n+1})\|$$

$= O((\Delta T)^2)$ par Taylor (y est C^2)

Cela donne alors

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{e^{L_1(n-i-1)} (1+L_1\Delta T)}_{\leq \text{Cste}} \|\varepsilon_i\| \right\| = O(\Delta T)$$

On a bien la convergence attendue et la même vitesse de convergence que par Euler explicite.

Le gain de la méthode implicite par rapport à son homologue explicite réside dans son meilleur conditionnement numérique.

(iv) Implémentation numérique sur un exemple : $y' = \cos(y)$