# Séance 10 : normes de matrices et conditionnement



## 1) Normes de matrices

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{(*)}$ de dimension $n^2$, qu'on munit à présent d'une topologie d'espace vectoriel normé.

Def soit $E$ e.v. On appelle norme sur $E$, toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que

(i) $\forall x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et
$N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$,
$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)

(iii) $\forall (x, y) \in E^2$,
$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

(*) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

* Exemples : si $E$ est de dimension finie, dans $\mathbb{K}^m$, on définit :

* $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$

* $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

* $\|x\|_\infty = \underset{1 \leq i \leq m}{\mathrm{Max}} |x_i|$

En particulier, dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$.

Par exemple :

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j} |A_{i,j}|$$

En dimension finie, on a le résultat suivant d'équivalence des normes :

Théorème : soit $E$, ev de dimension finie, $N_1$ et $N_2$ 2 normes sur $E$.
Il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tels que $\forall x \in E \quad c_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq c_2 N_1(x)$

(en particulier, les topologies associées sont identiques)

On profite à présent de la structure d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et de son isomorphisme avec $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$, par définir de nouvelles propriétés des normes :

* Def : soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $N$ est une norme d'algèbre si elle vérifie (i), (ii), (iii) et :
$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ N(AB) \leq N(A)N(B)$

* Def : soit $F$, $G$ deux evn munis des normes $N_1$ et $N_2$, et $E = \mathcal{L}(F,G)$.
Soit l'application : $|||\ \ ||| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$\forall f \in E$,

$$|||f||| = \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \left( \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)} \right)$$

Alors $|||\cdot|||$ est une norme sur $E$, appelée norme subordonnée à $N_1$ et $N_2$.

(cas particulier : $F = G = \mathbb{K}^n$ et $N_1 = N_2$)

Exemple : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère $|||A|||_\infty = \underset{\substack{x \neq 0 \\ \in \mathbb{K}^n}}{\text{Max}} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

On a bien :

(i) : $|||A|||_\infty = 0 \iff A = 0$

(ii) $|||\lambda A|||_\infty = |\lambda| \, |||A|||_\infty$

(iii) $|||A+B|||_\infty \leq |||A|||_\infty + |||B|||_\infty$

De plus,

$$|||AB|||_\infty = \underset{x \neq 0}{\text{Max}} \frac{|||ABx|||_\infty}{\|x\|_\infty}$$

$$\leq |||A|||_\infty \underbrace{\underset{x \neq 0}{\text{Max}} \frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty}}_{|||B|||_\infty}$$

Ainsi, toutes les normes subordonnées sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des normes d'algèbre.

Le théorème suivant donne une expression des normes subordonnées $|||\ |||_1$, $|||\ |||_2$, $|||\ |||_\infty$ :

**Théorème** : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

(i) on a $$|||A|||_1 = \underset{1 \leq j \leq n}{\mathrm{Max}} \left( \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \right)$$ 1 (colonnes)

(ii) on a $$|||A|||_\infty = \underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Max}} \left( \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \right)$$ $\infty$ (lignes)

(iii) on a
$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^t\bar{A} A)} \text{ où}$$

$$\rho(B) = \mathrm{Max} \left\{ |\lambda|, \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(B) \right\}$$
est appelé rayon spectral de $B$

preuve

(i) on a si $\|X\|_1 = \sum |x_i| = 1$,
$$\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \left( \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} X_j \right) \right|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \, |X_j|$$
$$\leq \underset{1 \leq j \leq n}{\mathrm{Max}} \left( \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \right) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |X_j|}_{1}$$

et $$|||A|||_1 \leq \underset{1 \leq j \leq n}{\mathrm{Max}} \left( \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \right)$$

Par ailleurs, en prenant
$$X = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0) \text{ où}$$
$j_0$ est tel que $\sum_i |A_{i,j_0}|$ est maximal,

$$\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|\left( \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} X_j \right)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} | A_{i,j_0} | = \operatorname{Max}_j \left( \sum_i |A_{i,j}| \right)$$

et ainsi, l'égalité est obtenue.

(ii) (à faire en exercice)

(iii) on utilise la structure euclidienne de $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_2)$ : si $\|X\|_2 = 1$,

$$\|AX\|^2 = \langle AX, AX \rangle \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R})$$

$$= \langle \underbrace{{}^tAA}_{\in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})} X, X \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i^2$$

si $0 \le \lambda_1 \dots \le \lambda_n$ désignent les valeurs propres (réelles) de ${}^tAA$, et $X = (X_1, \dots X_n)$ dans la base réduite.

Ainsi :

$$\|AX\|_2^2 \le \underbrace{\lambda_n}_{\rho({}^tAA)} \|X\|_2^2$$

d'où $|||A|||_2 \le \sqrt{\rho({}^tAA)}$

(le cas d'égalité est atteint pour le vecteur $e_n$, vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_n$).

Remarque : il existe des normes d'algèbre qui ne sont pas subordonnées (voir TD6)

Il existe un lien important entre norme subordonnée et rayon spectral :

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a pour toute norme subordonnée :

$$\rho(A) \leq |||A|||$$

Inversement, si $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont donnés, il existe une norme subordonnée $|||\ |||_\varepsilon$ telle que

$$|||A|||_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$$

preuve : soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $|\lambda| = \rho(A)$. Pour $X \in \mathbb{C}^n$, vecteur propre associé, on a

$$\|AX\| = \rho(A)\|X\|,$$

ce qui implique $|||A||| \geq \rho(A)$

Inversement, grâce à la trigonalisation sur $\mathbb{C}$, on peut construire une norme subordonnée vérifiant l'inégalité inverse à $\varepsilon$ près (voir poly de cours ou référence : Ciarlet, Allaire, ... )

Ce résultat permet d'obtenir une équivalence utile pour étudier les suites des puissances de A :

**Proposition** : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Les propositions :

(i) $\lim\limits_{i \to +\infty} A^i = 0$

(ii) $\lim\limits_{i \to +\infty} A^i x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^N$

(iii) $\rho(A) < 1$

(iv) il existe une norme subordonnée $|||A|||_N$ telle que $|||A|||_N < 1$.

Ces 4 propositions sont equivalentes (preuve : exercice)

**Remarque** : si $\rho(A) < 1$, on peut montrer que la serie $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} A^i$ est convergente et que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} A^i = (I - A)^{-1}$$

## 2) Conditionnement d'une matrice

Le conditionnement d'un problème (ici la résolution d'un système linéaire) designe la sensibilité (forte ou non) de la solution par rapport aux erreurs d'arrondi commises durant sa solution.

* Ici, le problème à résoudre est le système : $\boxed{AX=b}$ où $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $b\in\mathbb{K}^n$.
* On définit la notion de conditionnement d'une matrice afin de mesurer la sensibilité du calcul de $X$ par rapport aux erreurs d'arrondis sur $A$ et $b$.

Exemple : si $A=\begin{pmatrix} 1/3 & \pi \\ \sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix}$, on prendra numériquement

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 0.\underbrace{33\cdots3}_{16} & 3,\underbrace{14\cdots}_{16} \\ 1,41\cdots & 0,33\cdots \end{pmatrix}$$

$\tilde{X}$ peut fortement différer de $X$....

Déf : soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$. On note

$$\boxed{\mathrm{cond}(A)=|||A|||.|||A^{-1}|||}$$

où $|||\cdot|||$ désigne une norme subordonnée quelconque.

On a la proposition :

Proposition : si $A\in GL_n(\mathbb{K})$, $b\in\mathbb{K}^n$ et $\delta b\in\mathbb{K}^n$. On résout :

$$\left\{ AX=b \text{ et } A(X+\delta X)=b+\delta b \right.$$

On a alors :

amplification

erreur sur la donnée b

$$\boxed{\frac{N(\delta x)}{N(x)}\leq \mathrm{cond}(A)\frac{N(\delta b)}{N(b)}}$$

erreur sur la solution

preuve :

$Ax = b$ et $A(x+\delta x) = b + \delta b$

implique :

$\delta x = A^{-1}(\delta b)$ puis :

$0 \leq N(\delta x) \leq |||A^{-1}|||_N \; N(\delta b)$

De même

$0 \leq N(b) = N(Ax) \leq |||A|||_N \; N(x)$

En multipliant, on trouve le résultat.

Remarques : 1) on montre de même :

$$\left(\frac{N(\delta x)}{N(\delta x + x)}\right) \leq \underset{|||\,|||_N}{\mathrm{cond}}(A) \left(\frac{|||\delta A|||_N}{|||A|||_N}\right)$$

erreur sur la donnée A

2) $\mathrm{cond}(A) \geq 1$

(car $AA^{-1} = Id \Rightarrow$

$1 = |||Id||| \leq |||A|||\,.\,|||A^{-1}|||$)

et un "bon conditionnement" correspond à une valeur peu élevée de cond(A)

3) Il existe des techniques d'estimation rapide de $|\mathrm{cond}_2(A)$ sans avoir à calculer $A^{-1}$.

4) Certaines matrices, partant simples) ont des conditionnement très élevés.

Par exemple, la matrice de Hilbert

## 3) Quelques exercices d'illustration

(issus de la feuille TD 6)

Ex1) La norme $\| \ \|_1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j} |A_{i,j}|$$

* Il s'agit d'une norme usuelle
* Est-ce une norme matricielle ?

$$\|AB\|_1 \overset{?}{\leq} \|A\|_1 \cdot \|B\|_1$$

On a

$$\|AB\|_1 = \sum_{i,j} \left| \sum_k A_{i,k} B_{k,j} \right| \leq \sum_{i,j,k} |A_{i,k}| |B_{k,j}|$$

et

$$\|A\|_1 \cdot \|B\|_1 = \left( \sum_{i,k} |A_{i,k}| \right) \left( \sum_{l,m} |B_{l,m}| \right)$$

$$= \sum_{i,k,l,m} |A_{i,k}| \cdot |B_{l,m}|$$

$$\geq \underbrace{\sum_{i,k,m} |A_{i,k}| |B_{k,m}|}_{\|AB\|_1}.$$

C'est bien une norme matricielle.

* Est-ce une norme subordonnée ?

On sait que pour toute norme subordonnée, on a $|||Id||| = 1$

Or, $\|Id\|_1 = n \neq 1$ si $n \geq 2$.

On en déduit que $\|\ \|_1$ n'est pas subordonnée si $n \geq 2$.

Ex 2) la norme $\|\ \|_\infty$ :

$$\|A\|_\infty = \sup_{i,j} |A_{ij}|$$

* Il s'agit d'une norme.

* Est-elle subordonnée ?

On a $\|I_d\|_\infty = 1$ : on ne peut conclure avec cet argument.

On sait que pour toute norme subordonnée $\rho(A) \leq |||A|||$

Si on trouve $A$ tq $\|A\|_\infty < \rho(A)$ alors $\|\ \|_\infty$ ne sera pas subordonnée.

On prend
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\|A\|_\infty = 1$

et $\rho(A) = n$ (2 valeurs propres : $\overset{\text{mult. } n-1}{0}$, $\overset{\text{trace}}{n}$)

=> la norme n'est pas subordonnée

* Est-elle matricielle ?

$$\|AB\|_\infty \overset{?}{\leq} \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$$

Avec $A = B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$\|AB\|_\infty = n > \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$$

et la norme n'est pas matricielle.

Ex 3) On considère la norme de Schur :

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}}$$

Il s'agit d'une norme.

* Est-ce une norme matricielle ?

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{i,j} \left|\left( \sum_k A_{i,k} B_{k,j}\right)\right|^2$$

$$\underset{CS}{\leq} \underbrace{\sum_{i,j} \left( \left(\sum_k A_{i,k}^2\right)\left(\sum_k B_{k,j}^2\right)\right)}$$

$$||$$

Or

$$\|A\|_2^2 \cdot \|B\|_2^2 = \overbrace{\left(\sum_{i,j} |A_{ij}|^2\right)\left(\sum_{p,m} |B_{p,m}|^2\right)}$$

la norme est bien matricielle.

* Est-ce une norme subordonnée ?

On a

$$\rho(A)^2 \leq \|A\|_2^2 = \sum |A_{ij}|^2$$

En effet, soit $\lambda$ une valeur propre et $X = {}^t(x_1, \dots x_n)$ un vecteur propre :

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + \dots + A_{1,n}X_n = \lambda X_1 \\ \vdots \\ A_{n,1}X_1 + \dots + A_{n,n}X_n = \lambda X_n \end{cases}$$

On veut $|\lambda|^2 \leq \sum_{i,j} |A_{ij}|^2$

En effet $|\lambda|^2 \left(\sum |X_i|^2\right) =$

$$\dots \leq \sum_i \left|\left( \sum_j A_{ij} x_j \right)\right|^2$$

$$\leq \sum_i \left( \left(\sum_j |A_{ij}|^2\right) \left(\sum_j |x_j|^2\right) \right)$$

soit, en prenant $\sum_i |x_i|^2 = 1$, on a

$$|\lambda|^2 \leq \sum_i \left( \sum_j |A_{ij}|^2 \right) \quad //,$$

La norme n'est pas subordonnée car $\|Id\|_2 = \sqrt{n}$ //

Ex3) (conditionnement de la matrice du laplacien discrétisé)

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \Big\updownarrow n$$

$A_n >> 0$ car

$${}^t X A X = \sum_{i,j} A_{ij} X_i X_j$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(X_{i+1} - X_i)^2}_{X_{i+1}^2 + X_i^2 - 2X_i X_{i+1}}$$

(en notant $X_0 = X_{n+1} = 0$)

et A est bien définie positive.

Soit $v_k = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}$

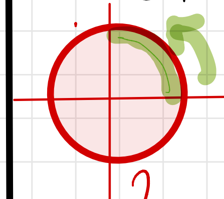
$$(Av_k)_i = -\sin\left(\frac{(i-1)k\pi}{n+1}\right) + 2\sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{(i+1)k\pi}{n+1}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) + 2\sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)$$

(avec $v_0 = \sin\left(\frac{0k\pi}{n+1}\right) = 0$ et
$v_{n+1} = \sin\left(\frac{(n+1)k\pi}{n+1}\right) = 0$ )

$$= \lambda_k \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)$$

avec $\lambda_k = 2\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$



$$= 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$$

Or $\{\lambda_k, k \in \{1, \dots, n\}\}$ famille à $k$ éléments distincts.

On a donc trouvé

→ $k$ valeurs propres $\left\{4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right), 1 \le k \le n\right\}$

→ $k$ vecteurs propres $\{v_1, \dots v_n\}$

On détermine le conditionnement de A grâce au lemme suivant :

**Lemme** : soit $A \gg 0$, on a

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \quad \text{où}$$

plus grande

plus petite

$0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de $A$.

**preuve** :

On a $\mathrm{cond}_2(A) = |||A|||_2 \, . \, |||A^{-1}|||_2$

norme subordonnée par rapport à $\| \ \|_2$

En effet $|||A|||_2 = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \lambda_n$

(car $A \gg 0$)

et $|||\underbrace{A^{-1}}_{\gg 0}|||_2 = \dfrac{1}{\lambda_1}$ //

Grâce au lemme, on a dans le cas présent, comme $A_n \gg 0$,

On a

$$\mathrm{cond}_2(A_n) = \frac{4\sin^2\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{\pi^2}$$

relativement bien conditionné tant que $n < 10^4$