Séance 11 : méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

On revient au problème de la résolution du système linéaire cramérien

$$\boxed{Ax = b} \quad (A \in GL_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n)$$

mais avec une autre approche consistant à construire une suite d'approximations $(x_k) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$.

Cette construction est itérative :

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ quelconque} \\ x_{k+1} = f(x_k) \quad 0 \leq k \end{cases}}$$

et telle que $\lim_{k \to +\infty} x_k = x^*$ solution de $Ax = b$.

1

1) Principe général de construction

On décompose A de la manière suivante :

$$\boxed{A = M - N}$$

avec $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

(i) M inversible

(ii) M facile à inverser : diagonale, triangulaire, orthogonale ....

On prend alors la suite

$$\boxed{x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)}$$

Dans ce cas, si $x_k \to \tilde{x}$, alors $\tilde{x} = M^{-1}(N\tilde{x} + b)$ soit $A\tilde{x} = b$ et $\tilde{x} = x^*$.

On a le résultat général suivant :

Théorème : la méthode itérative définie par la relation

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b) \end{cases}$$

converge (c'est à dire (x_k) tend vers x^* pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$) si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$

preuve : * on suppose que $\rho(M^{-1}N) < 1$. Avec le résultat de la séance précédente, il existe $|||\cdot|||$ telle que $|||M^{-1}N||| < 1$. Pour cette norme, en utilisant la norme $\|\ \|$ associée sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$x_{k+1} - x^* = M^{-1}(N(x_k - x^*))$$

$$\Longrightarrow \|x_{k+1} - x^*\| \leq \underbrace{|||M^{-1}N|||}_{<1} . \|x_k - x^*\|$$

et $\|x_k - x^*\| \to 0$

* on suppose que $\rho(M^{-1}N) \geq 1$

dans ce cas, il existe $u_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $M^{-1}N u_0 = \rho(M^{-1}N)\, u_0$

En particulier

$$|||\,(M^{-1}N)^k u_0\,||| \not\to 0$$

En prenant

$x_0 = x^* + \mathcal{R}e(u_0)$ ou

$x_0 = x^* + \mathcal{I}m(u_0)$

l'une des deux conditions initiales sera telle que

$$|||(M^{-1}N)^k (x_k - x^*)||| \not\to 0$$

Si la matrice A est symétrique définie positive, on a une condition suffisante plus simple :

Théorème : soit $A \gg 0$. Pour la méthode itérative associée à la décomposition (M, N), on a ${}^tM + N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de plus, la méthode est convergente si ${}^tM + N$ est définie positive.

preuve : $\star$ ${}^tA = A \Rightarrow$

${}^t(M-N) = M-N$ soit

${}^tM + N = M + {}^tN = {}^t({}^tM+N)$.

$\star$ si de plus ${}^tM + N \gg 0$, on montre que la méthode est convergente construisant la norme subordonnée associée à la norme euclidienne :

$$\|x\|_A = \sqrt{\langle x, Ax \rangle}.$$

On montre que $|||M^{-1}N|||_A < 1$.

et donc que la méthode est convergente.

(voir détails dans poly de cours ou références usuelles).

2) Méthodes de Jacobi et Gauss Seidel

2.1) Méthode de Jacobi

On choisit ici

$$M = D \text{ où } D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et $N = M - A$

Cette méthode n'est définie que si $\forall i \in \{1, \dots n\}, a_{ii} \neq 0$.

Dans ce cas, une itération s'écrit :

$$x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$$

soit

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{a_{ii}}\left(-a_{i,1}x_k^1 \cdots - a_{i,i-1}x_k^{i-1} - a_{i,i+1}x_k^{i+1} \dots - a_{i,n}x_k^n + b_i\right)$$

$(1 \leq i \leq n)$

On note :

$$J = D^{-1}(D-A)$$

* Cette méthode converge ssi $\rho(J)<1$
* Lorsque $A \gg 0$, la méthode est bien définie et ${}^tM+N = 2D-A$

Si $2D-A \gg 0$, cette méthode converge.

(voir Exercice, TD 7).

2.2. Méthode de Gauss Seidel

On écrit

$$A = \begin{pmatrix} D & \text{partie supérieure stricte} \; -F \\ -E & \end{pmatrix}$$

On choisit ici :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = D - E$$

et $N = M - A = F$

$(A = M - N = D - E - F)$

Cette méthode n'est définie que si $\forall i \in \{1,\dots,n\}, a_{ii} \neq 0$.

Dans ce cas, une itération s'écrit :

$$x_{k+1} = M^{-1}(N x_k + b) \text{ soit :}$$

$$x^i_{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-a_{i,1}x^1_{k+1} \cdots - a_{i,i-1}x^{i-1}_{k+1} - a_{i,i+1}x^{i+1}_k \cdots - a_{i,n}x^n_k + b_i\right)$$

$(1 \leq i \leq n)$

On note $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F$

La méthode de Gauss Seidel converge ssi $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$.

* Lorsque $A \gg 0$, la méthode est bien définie et

$${}^tM + N = {}^t(D-E) + F = D - {}^tE + F$$

or, ${}^tE = F$ et ainsi ${}^tM + N = D \gg 0$

la méthode est toujours convergente

2.3) Comparaison des 2 méthodes

Dans le cas général, il n'existe pas de comparaison (voir TD7).

Il existe des comparaisons dans certains cas particuliers :

Proposition : soit A tridiagonale telle que $a_{ii} \neq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Alors $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$

En particulier, les 2 méthodes convergent simultanément. La méthode de Gauss Seidel converge toujours rapidement (car $\rho(\mathcal{L}_1) < \rho(J) < 1$)

preuve : voir poly. On montre en particulier que $\chi_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = c\lambda^n \chi_J(\lambda)$

Quelques exemples (issus du TD7)

Ex2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$

A est symétrique. Est-elle définie positive ? On vérifie le critère de Sylvester :

$\rightarrow 1 > 0$

$\rightarrow 1 - (3/4)^2 > 0$

$\rightarrow \left(1 - (3/4)^2\right) - 3/4\,(0) + 3/4\left((3/4)^2 - 3/4\right)$

$= 1 + (3/4)^3 - 2 \cdot (3/4)^2 > 0$

et $A \gg 0$.

* Méthode de Gauss-Seidel : toujours convergente
* Méthode de Jacobi : on calcule

$$2D - A = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -3/4 \\ -3/4 & 1 & -3/4 \\ -3/4 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-elle définie positive ? On teste :

$\det(2D - A) \overset{\text{Saarus}}{=} 1 - (3/4)^3 - (3/4)^3 + 3\,(3/4)^2 > 0$

) la méthode de Jacobi converge

Ex3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ les 2 méthodes sont bien définies.

$$J = M^{-1}N = D^{-1}(D-A)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(rayon spectral à calculer)

Idem par Gauss Seidel avec

$$\mathcal{L}_1 = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (M-A)$$

(on trouve après calculs que Jacobi converge et pas Gauss-Seidel)

3) Autres méthodes

3.1) Méthode de relaxation (ou SOR)

Successive Over Relaxation

Le principe consiste à relaxer la méthode Gauss Seidel en repartissant la diagonale de A entre M et N :

En notant $A = D - E - F$, on prend

$$\begin{cases} M = \frac{1}{\omega} D - E \\ N = M - A = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F \end{cases}$$

où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ est appelé paramètre de relaxation ($\omega = 1 \equiv$ Gauss Seidel)

On note

$$\mathcal{L}_\omega = M^{-1}N = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{\omega}-1\right)D + F\right)$$

On a nécessairement $\omega \in]0,2[$, car

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \frac{\left(\frac{1}{\omega}-1\right)^n}{\left(\frac{1}{\omega}\right)^n} = (1-\omega)^n$$

Ainsi, $\underbrace{|\det(\mathcal{L}_\omega)|}_{=\left|\prod_{i=1}^n \lambda_i\right|} \geq 1$ si $\omega \notin]0,2[$.

et en particulier $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq 1$

$\star$ Si $A \gg 0$,

$${}^tM + N = \frac{1}{\omega}D - \cancel{{}^tE} + \left(\frac{1}{\omega}-1\right)D + \cancel{F}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2}{\omega}-1\right)}_{>0 \text{ si } \omega \in]0,2[} D$$

Ainsi, la méthode converge pour tout $\omega \in]0,2[$.

En particulier, il est possible d'ajuster le paramètre ω pour améliorer la convergence de la méthode de Gauss-Seidel.

On peut par exemple démontrer le théorème suivant :

Théorème : soit A une matrice tridiagonale, définie positive (par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$)

Les 3 méthodes, Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation convergent.

De plus, il existe un paramètre de relaxation optimal $\omega_{opt} \in]1,2[$, tel que

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{opt}}) = \operatorname{Inf}_{\omega \in]0,2[} \rho(\mathcal{L}_\omega)$$

De plus,

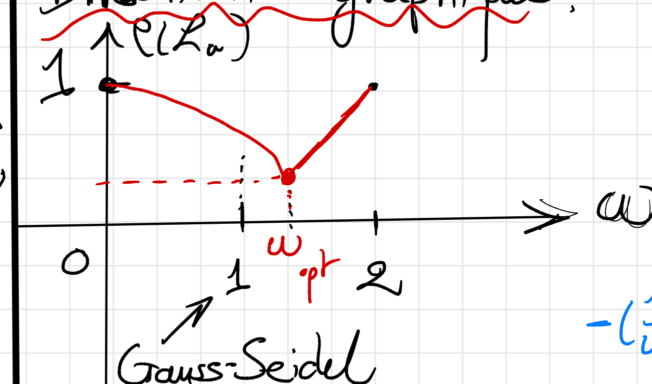
$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}$$

et

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{opt}}) = \omega_{opt} - 1 < \rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$$

preuve : voir poly de cours, ou biblio usuelle (Ciarlet)

Illustration graphique :



Implementation SOR :

$$x^i_{k+1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega} a_{ii}\right)} \left(-a_{i,1} x^1_{k+1} \cdots - a_{i,i-1} x^{i-1}_{k+1} - \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) a_{ii} x^i_k - a_{i,i+1} x^{i+1}_k \cdots - a_{in} x^n_k + b_i \right)$$

$(1 \leq i \leq n)$

3.2) Méthode de gradient

Dans cette méthode, on choisit la décomposition suivante :

$$\begin{cases} M = \frac{1}{\alpha} Id & (\alpha \in \mathbb{R}_+^*) \\ N = M - A = \frac{1}{\alpha} Id - A \end{cases}$$

Cette méthode est toujours correctement définie et s'écrit :

$$\boxed{x_{k+1}} = \alpha \cancel{Id}\left(\left(\frac{1}{\alpha} Id - A\right)x_k + b\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{1}{\alpha} x_k - A x_k + b\right)$$

$$= x_k - \alpha(A x_k - b)$$

$\star$ si $A \gg 0$, on a

$${}^tM + N = \frac{1}{\alpha} Id + \frac{1}{\alpha} Id - A$$

$$= \frac{2}{\alpha} Id - A \gg 0 \text{ ssi}$$

$\alpha \in \left]0, \frac{2}{\rho(A)}\right[$.

Proposition : soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

$\star$ si A n'est pas définie négative ou définie positive, la méthode ne converge pas.

$\star$ si $A \gg 0$ de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, la méthode converge ssi $\alpha \in \left]0, \frac{2}{\lambda_n}\right[$. De plus, la convergence est optimale si

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$ par lequel :

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$

preuve (à faire avec le TD7)

Ex 4

1) On a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} - b)$$

soit :

$$x^{(k+1)} = B_\alpha x^{(k)} + c \quad (*)$$

$B_\alpha = Id - \alpha A$

$c = \alpha b$

2) La méthode $(*)$ converge ssi $\rho(B_\alpha) < 1$.

soit : $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |1 - \alpha \lambda_i| < 1$

3) on suppose

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

(par exemple)

Si $\alpha < 0$, $|1 - \alpha\lambda_n| = 1 \underbrace{- \alpha\lambda_n}_{>0} > 1$

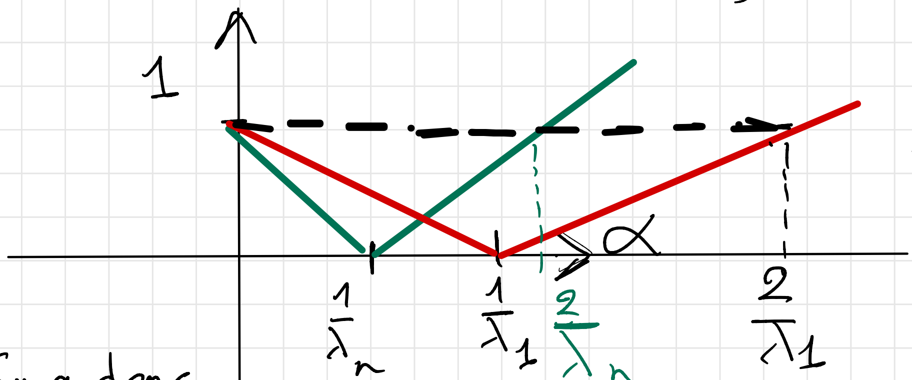
Si $\alpha > 0$, $|1 - \alpha\lambda_1| = 1 - \alpha\lambda_1 > 1$

La méthode ne converge par aucun α.

4) On suppose $0<\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$.

a) Alors

$$\max_{1\le i\le n} |1-\alpha\lambda_i| = \max\left(|1-\alpha\lambda_1|, |1-\alpha\lambda_n|\right)$$



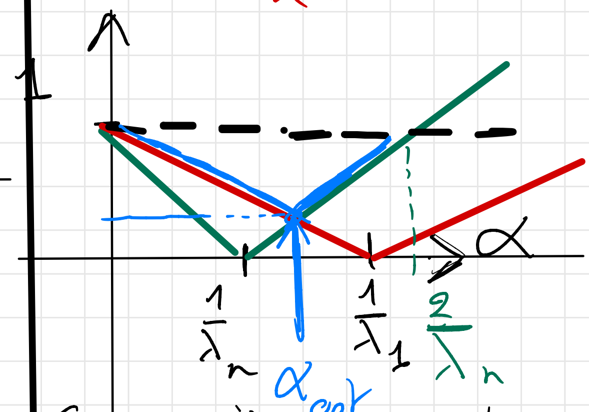
On a donc

$$\max\left(|1-\alpha\lambda_1|, |1-\alpha\lambda_n|\right) < 1$$

si et seulement si $0<\alpha< 2/\lambda_n = \frac{2}{\rho(A)}$

b,c) On cherche $\alpha_{opt} \in \left]0, \frac{2}{\rho(A)}\right[$ pour lequel

$$\underbrace{\max_{1\le i\le n} |1-\alpha\lambda_i|}_{\rho(B_\alpha)} \text{ soit minimal.}$$



En ce point on a

$$|1-\alpha\lambda_1| = |1-\alpha\lambda_n|$$

soit $1-\alpha\lambda_1 = \alpha\lambda_n - 1$

On trouve $\alpha_{opt} = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$

En cette valeur

$$\rho(B_\alpha) = 1 - \alpha_{opt}\lambda_1 = 1 - \frac{2\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_n} = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$

d) On admet (provisoirement) que $cond_2(A) = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$ si $A >> 0$.

On a donc

$$\rho(B_\alpha) = \frac{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1}{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} + 1} = \frac{k_2(A) - 1}{k_2(A) + 1}$$

Si la matrice est mal conditionnée, c'est à dire $k_2(A)$ grand, alors $\rho(B_\alpha) \simeq 1$ (et la méthode itérative converge très lentement)

Remarque : on parle de la méthode du gradient, car on minimise aussi la fonction quadratique suivante :

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

par laquelle

$$\nabla J(x) = Ax - b$$

par la méthode d'optimisation du gradient à pas α : $x_{k+1} = x_k - \alpha(Ax_k - b)$

gradient de J

A faire : implémentation Python des méthodes itératives usuelles sur différents exemples :

* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (4 méthodes possibles)

* Les exemples du TD7

Jacobi : x_0 donné et

$$x_{k+1}^{i} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-a_{i,1}x_k^1 \cdots - a_{i,i-1}x_k^{i-1} - a_{i,i+1}x_k^{i+1} \cdots - a_{i,n}x_k^n + b_i\right)$$

$(1 \leq i \leq n)$
$(0 \leq k \ )$

Gauss-Seidel : x_0 donné et

$$x_{k+1}^{i} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-a_{i,1}x_{k+1}^1 \cdots - a_{i,i-1}x_{k+1}^{i-1} - a_{i,i+1}x_k^{i+1} \cdots - a_{i,n}x_k^n + b_i\right)$$

$(1 \leq i \leq n)$

SOR

$$x_{k+1}^{i} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega}a_{ii}\right)}\left(-a_{i,1}x_{k+1}^1 \cdots - a_{i,i-1}x_{k+1}^{i-1} - \left(\frac{1}{\omega}-1\right)a_{ii}x_k^{i} - a_{i,i+1}x_k^{i+1} \cdots - a_{i,n}x_k^n + b_i\right)$$

$(1 \leq i \leq n)$