Séance 13 : Algèbre linéaire : décomposition de Dunford-Jordan et applications

L'objectif est de construire, par un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, une base $\mathcal{B}$ dans laquelle

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_i & 0 \\ 0 & 0 & T_r \end{pmatrix}$$

où T_i est une matrice triangulaire à diagonale constante ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Cela permettra ensuite de pouvoir calculer des puissances de matrice puis des exponentielles de matrice, afin de résoudre différents problèmes : terme général d'une suite récurrente, résolution de systèmes linéaires d'EDO, etc....

1) Sous espaces caractéristiques

* Def : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre généralisé s'il existe $m \geq 1$ tq

$$(u - \lambda I)^m . x = 0$$

Remarque : on a forcément $\lambda \in Sp(u)$ (en considérant $(u-\lambda Id)^{m-1}x$, supposé non nul).

* Def : On appelle espace caractéristique de u de poids λ, le sous-espace de E, formé des vecteurs propres généralisés, complété par le vecteur nul :

$$E^{\lambda}(u) = \left\{ x \in E \;/\; \exists m \geq 0 \;\; (u-\lambda I)^m x = 0 \right\}$$

On a

$$E^{\lambda}(u) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\operatorname{Ker}(u-\lambda I)^m}_{\text{sev. emboîtés}}$$

En particulier, il existe $m \geq 1$ tel que $E^{\lambda}(u) = \operatorname{Ker}(u-\lambda Id)^m$.

On a la proposition suivante :

Proposition soit $\lambda \in Sp(u)$

On note, à bon droit, $u_{/E^{\lambda}}$ la restriction de u à E^{λ}. Il existe une base $\mathcal{B}_{\lambda}$ de E_{λ} telle que

$$\underset{\mathcal{B}_{\lambda}}{\operatorname{Mat}}(u_{/E^{\lambda}}) = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

preuve (exercice)

On a la relation suivante entre la dimension de E^{λ} et χ_u, polynôme caractéristique de u :

Proposition :

$\boxed{\dim(E^\lambda) = m_a(\lambda)}$ où

$m_a(\lambda)$ représente la multiplicité algébrique de λ dans χ_u.

(preuve issue de la proposition précédente).

Il existe une propriété générale sur la somme de sous espaces caractéristiques

Proposition les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme sont en somme directe.

(preuve issue du lemme des noyaux).

Remarque : si on a :

$E^\lambda = \ker(u - \lambda Id)^m$ (m le plus petit), alors m est la multiplicité algébrique de λ dans le polynôme minimal de u, Π_u.

2) Projecteurs spectraux

Dans cette partie, on suppose que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$:

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{a_i}$$

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

On a dans ce cas

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \underbrace{E^{\lambda_i}(u)}_{\operatorname{Ker}(u-\lambda_i I)^{a_i}}$$

On note p_i la projection sur E^{λ_i} parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E^{\lambda_j}$.

(on les appelle projecteurs spectraux)

Il s'agit de polynômes en u :

Proposition : soit $i \in \{1, \dots, r\}$

Il existe un polynôme Q_i

tq $Q_i \equiv 1 \mod (X-\lambda_i)^{a_i}$

et $Q_i \equiv 0 \mod (X-\lambda_j)^{a_j}$ $(j \neq i)$

On a alors

$$p_i = Q_i(u).$$

preuve : on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{\chi_u} = \sum_{i=1}^{r} \frac{U_i}{(X-\lambda_i)^{a_i}} \quad \text{avec } U_i \in \mathbb{K}_{a_i-1}[X]$$

Ainsi

$$1 = \sum_{i=1}^{r} \overbrace{U_i \left(\prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)^{a_j} \right)}^{Q_i}$$

En appliquant ce polynôme en u puis en x, on a

$$x = \sum_{i=1}^{r} \overbrace{Q_i(u)}^{p_i}(x)$$

on a bien $Q_i(u) = p_i$.

3) Décomposition de Dunford-Jordan

On se place toujours dans le cas d'un polynôme caractéristique scindé.

On a le théorème suivant :

Théorème : on a la décomposition suivante de u :

$$\boxed{u = d + n} \text{ avec}$$

* d diagonale
* n nilpotente $(\exists k \in \mathbb{N}^* / n^k = 0)$
* $dn = nd$

De plus, d et n sont des polynômes en u.

preuve :

→ existence : on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E^{\lambda_i}(u). \text{ On note}$$

$$\boxed{d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i}$$

et

$$\boxed{n = u - d}$$

On a bien $u = d + n$, d diagonale, d et n polynômes en u donc commutent.

Il reste à verifier que n est nilpotente :

* sur E^{λ_i}, $n(x) = u(x) - \lambda_i x$

$$= (u - \lambda_i Id) x$$

soit $n^{m_i}(x) = (u - \lambda_i Id)^{m_i}(x) = 0$

→ unicité (exercice). basé sur la co-diagonalisation.

Corollaire : soit u ayant une décomposition $u = d + n$.

* u diagonalisable $\Longleftrightarrow n = 0$
* u nilpotent $\Longleftrightarrow d = 0$

Exemples de calcul de projecteurs spectraux :

* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ici $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 3$

On a $A^2 = 3A$

Expression de p_0 et de p_3 ?

On a $A = \underbrace{0 \cdot p_0 + 3 \cdot p_3}_{d}$

$\Longrightarrow p_3 = \frac{1}{3} A$

De plus

$p_0 + p_3 = Id$, d'où $p_0 = Id - \frac{1}{3} A$.

* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

On trouve $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$

On calcule

$$\frac{1}{\chi_A} = \frac{1}{(X-1)} + \frac{3-X}{(X-2)^2}$$

On en déduit

$$P_1 = (A - 2I)^2$$

$$P_2 = (3I - A)(A - I) = -A^2 + 4A - 3I$$

4) Forme réduite de Jordan

Def 1: un bloc de Jordan est une matrice du type :

$$J_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

On a $(J_{\lambda,m} - \lambda I)^m = 0$

Def 2 : une matrice de Jordan est une matrice formée de blocs de Jordan :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{i} & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_r \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \lambda & 0 & \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

L'objectif est de montrer que tout endomorphisme possède une base dans laquelle sa matrice est une matrice de Jordan (avec condition d'unicité). Par cela, on s'intéresse aux endomorphismes nilpotents :

On rappelle la définition et les propriétés élementaires des endo-morphismes nilpotents :

→ u nilpotent $\Leftrightarrow \exists m \geq 1, u^m = 0$

→ le plus petit de ces entiers s'appelle l'indice de nilpotence.

→ si $e \in E$ tq $u^{m-1}(e) \neq 0$, alors la famille $\{e, u(e), \dots u^{m-1}(e)\}$ est libre.

→ si u nilpotent $u^n = 0$ où $n = \dim E$

→ L'espace $\{e, u(e), \dots u^{m-1}(e)\}$ est stable par u et a par matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$ dans la base

$\mathcal{B} = (u^{m-1}(e), \dots u(e), e)$

On a alors le résultat suivant :

Théorème : si u nilpotent dans E, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{0,n_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots J_{0,n_i} & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{0,n_r} \end{array}\right)$$

avec $r = \dim \operatorname{Ker}(u)$.

On peut à présent énoncer le théorème général attendu :

Théorème : soit $u \in \mathcal{L}(E)$, tq χ_u soit scindé.

Alors, il existe une base de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots J_i \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_r \end{array}\right)$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

Le nombre de blocs r, ne dépend que de u et les λ des matrices de Jordan sont les valeurs propres de u.

preuve : on utilise la décomposition de Dunford et le résultat précédent sur les matrices nilpotentes.

(Résultat général sur $\mathbb{K}$)

Ce résultat permet de démontrer différents résultats en algèbre linéaire, par exemple que A et ${}^tA$ sont semblables.

5) Applications

5.1) Calcul de systèmes de suites récurrentes

On veut étudier le système itératif

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

avec $(u_0, v_0, w_0, \dots)$ donnés

On exprime le terme général des suite avec les puissances de A :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Pour calcul A^k, deux cas seront à considérer :

→ si A est diagonalisable :

$A = PDP^{-1}$ alors

$A^k = PD^k P^{-1}$

(on peut dire aussi que

$A = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r$

et $A^k = \underbrace{\lambda_1^k}_{\text{v.p}} \underbrace{p_1}_{\text{projecteurs}} + \dots + \lambda_r^k p_r$)

→ si A n'est pas diagonalisable, on utilise la décomposition de Dunford :

$A = \underset{\text{diag}}{D} + \underset{\text{nilp.}}{N}$ tq $DN = ND$

On a alors $A^k = (D+N)^k$

$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j$ commutativité

$= \underbrace{\sum_{j=0}^{\min(k,m-1)}}_{m+1 \text{ termes}} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j$

En termes de projecteurs, on a :

si $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{a_i}$, alors

$$A^k = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{\mathrm{Min}(m, a_i-1)} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (A-\lambda_i I)^j \right) P_i$$

Remarque : on peut en particulier exprimer le terme général des suites récurrentes d'ordre p :

$$u_{n+p} = a_1 u_n + a_2 u_{n+1} + \dots a_p u_{n+p-1}$$

grâce à la relation

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ a_1 & \cdots & & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

5.2) Exponentielle de matrices

Déf soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$\exp(A) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{A^k}{k!}$$

série absolument convergente

On retrouve la définition usuelle de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Quelques propriétés à connaître :

→ $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

→ $\exp(0_E) = Id_E$.

→ Si A et B commutent, alors

$$\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$$

→ $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

→ $\exp(A)$ et A commutent.

→ $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$

On a une expression générale de $\exp(A)$ avec les projecteurs spectraux :

$$\exp(A) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \left(\sum_{j=0}^{a_i - 1} \frac{(A-\lambda_i)^j}{j!} \right) P_i$$

5.3) Résolution de systèmes linéaires d'EDO

Déf (dérivée d'une matrice)

si $A(t) = [a_{ij}(t)]$, alors on note $A'(t) = [a'_{ij}(t)]$

Proposition : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

on a

$$(\exp(tA))' = A\exp(tA)$$

preuve : il suffit de calculer la dérivée en $t=0$ (puis d'utiliser $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$) :

$$\frac{\exp(hA)-Id}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} A$$

On s'intéresse aux EDO du type :

$$Y'(t) = AY(t) \quad (\star) \quad \text{où}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On montre le résultat suivant :

Théorème

le système $(\star)$ avec $Y(0)=Y_0$ possède une unique solution :

$$Y(t) = \exp(tA)Y_0$$

(preuve :

$$\left(\left(Y(t)\exp(-tA)\right)\right)' = 0\ )$$

On est donc ramené à calculer $\exp(tA)$ pour exprimer Y.

Corollaire : l'EDO scalaire d'ordre p :

$$y^{(p)} = a_1 y + a_2 y' + \dots + a_p y^{(p-1)}$$

est un cas particulier du cas général précédent (voir suites récurrentes).