1

Séance 14 : recherche numérique de valeurs propres et vecteurs propres

Objectif : construire un algorithme de recherche de valeurs propres et/ou vecteurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque : il s'agit forcément d'algorithmes conduisant à des valeurs approchées (et non exactes) des éléments propres ($\equiv$ il n'existe pas de méthode exacte pour rechercher les racines d'un polynôme de degré ≥ 5).

* Comme pour les résolutions de systèmes linéaires, le problème du bon conditionnement se pose (différent du conditionnement pour la résolution de systèmes).

Applications : il existe de multiples applications où la recherche d'une valeur propre particulière (par exemple la plus grande en module) et d'un vecteur propre associé :

$\longrightarrow$ l'algorithme PageRank de Google.

$\longrightarrow$ le modèle de Leslie en dynamique des populations (voir textes)

1) Conditionnement pour la recherche de valeurs propres

Def : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On appelle conditionnement de A (pour la recherche de valeurs propres) la quantité

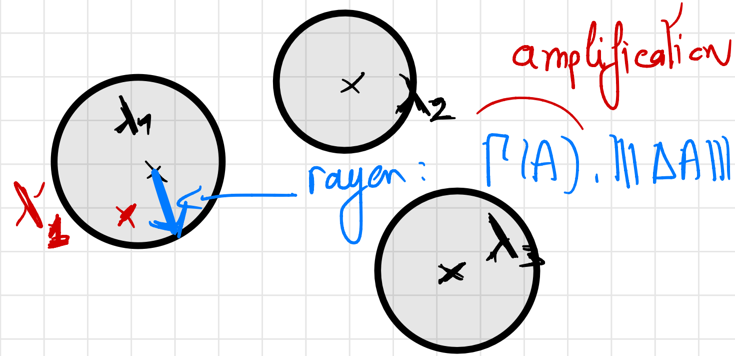
$$\Gamma(A) = \operatorname{Inf}\left(\operatorname{cond}(P)\right) \quad (P \text{ tq } P^{-1}AP \text{ diagonale})$$

où $\operatorname{cond}(P) = |||P|||.|||P^{-1}|||$

Cette définition se justifie avec la proposition suivante :

Proposition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, de valeurs propres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Soit $A' = A + \Delta A$. Alors

$$Sp_{\mathbb{C}}(A') \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\lambda_i, \Gamma(A)\,|||\Delta A|||)$$



preuve : on renvoie, soit au poly de cours, soit à [Ciarlet].

Remarques : * $\Gamma(A) \geq 1$ (car $\operatorname{cond}(P) \geq 1$)

* si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{cond}_2(P)=1$ (car P orthogonale) et ainsi $\Gamma(A)=1$.

Toutes les matrices dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont donc bien conditionnées pour la recherche de valeurs propres ; cela est le cas en particulier pour la matrice de Hilbert :

$$H_n = \left[\frac{1}{i+j-1}\right].$$

On présente ici 4 méthodes différentes :

→ Méthode de Jacobi (spectre complet $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$)

→ Méthode QR (spectre complet A diagonalisable sur $\mathbb{C}$)

→ Givens-Householder (une partie du spectre $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$)

→ puissance (itérée ou inverse) (vecteur propre par une valeur propre spécifique)

2) Méthode de Jacobi

Le principe général consiste à transformer $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en une matrice "quasi-diagonale" par matrice semblable de type rotation.

Def : soit $p \neq q$, et $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$Q_{p,q}(\theta) = \begin{array}{c} \\ \\ p \to \\ \\ q \to \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & p & & q & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & \cos(\theta) & & -\sin(\theta) & & \\ & 0 & & 1 \; \ddots \; 1 & & & 0 \\ & & \sin(\theta) & & \cos(\theta) & & \\ & & & 0 & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

la matrice de rotation plane d'angle θ

On a le lemme suivant :

Lemme : soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tq $a_{p,q} \neq 0$. Il existe $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \setminus \{0\}$ tq

$$B = {}^t Q_{p,q}(\theta) A Q_{p,q}(\theta)$$

est tel que $b_{p,q} = b_{q,p} = 0$

preuve : on se ramène à $n = 2$ et on prend $\theta = \frac{1}{2} \operatorname{atan}\left(-\frac{2a_{p,q}}{a_{pp} - a_{qq}}\right)$

Ce lemme permet de l'algorithme suivant :

* $A_0 = A$
* $A_1 = {}^t Q_{p_0,q_0}(\theta_0) A Q_{p_0,q_0}(\theta_0)$ avec (p_0, q_0 tels que $|a_{p_0 q_0}| = \operatorname{Max}_{p \neq q} |a_{p,q}|$
θ_0 issu du lemme)

on itère ensuite et on construit la suite de matrices symétriques $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$

On démontre le résultat suivant :

Théorème : soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ ses valeurs propres. Alors

A_k converge vers une matrice diagonale de coefficients $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ à permutation près. On parle de la méthode de Jacobi de recherche de valeurs propres.

preuve : voir poly ou [Ciarlet].
Elle utilise en particulier

le résultat général suivant :

Proposition : soit (x_k) suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} * \ (x_k) \text{ bornée} \\ * \ (x_k) \text{ possède un nombre fini de valeurs d'adhérence} \\ * \ \lim\limits_{k \to +\infty} (\|x_{k+1} - x_k\|) = 0 \end{cases}$$

Alors, la suite (x_k) converge.

(exercice)

Exercice : implémenter la méthode de Jacobi pour la recherche de valeurs propres d'une matrice symétrique

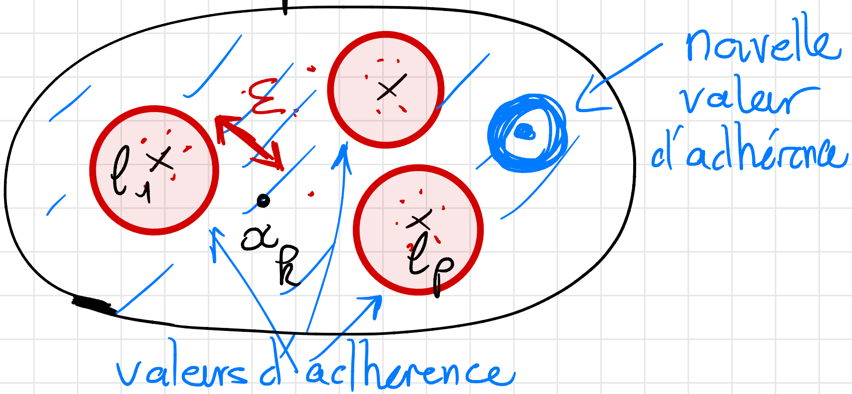
Remarque : il est possible d'obtenir aussi les vecteurs propres associés (lorsque les valeurs propres de A sont simples), en calculant

$$Q_k = \prod_{i=0}^{k} Q_{p_i q_i}(\theta_i)$$

(les colonnes de Q_k correspondent à des vecteurs propres approchées par les valeurs propres classées dans le même ordre).

Preuve de l'exercice :

Graphiquement, par l'absurde, s'il existe plusieurs valeurs d'adhérence :



Par l'absurde, on suppose que la suite possède $p \geq 2$ valeurs d'adhérence, notées $\ell_1, \dots, \ell_p$. On note

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4} \min_{i \neq j} \|\ell_i - \ell_j\|$$

par $n \geq n_0$, on a

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon_0$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, il existe $k \geq n$ tel que $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{p} B(\ell_i, \varepsilon_0)$.

Ainsi, comme la suite est bornée, il existe une valeur d'adhérence dans $\left(\bigcup_{i=1}^{p} B(\ell_i, \varepsilon_0)\right)^c$, ce qui est absurde.

3) Méthode QR

Il s'agit d'une méthode relativement générale de recherche du spectre d'une matrice par factorisations QR

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible de valeurs propres complexes, toutes de module distinct :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

On suppose que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$: $A = PDP^{-1}$ avec P admettant une factorisation LU.

Dans ce cas, on construit la suite (A_k) telles que :

$$\begin{cases} A_0 = A = Q_0 R_0 \\ A_1 = R_0 Q_0 = Q_1 R_1 \\ A_2 = R_1 Q_1 = Q_2 R_2 \\ \dots\dots \end{cases}$$

Alors la matrice (A_k) est telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{k \to +\infty} (A_k)_{ii} = \lambda_i \\ \lim\limits_{k \to +\infty} (A_k)_{ij} = 0 \text{ si } i > j \end{cases}$$

$$\left(A_k \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right)$$

preuve : voir Ciarlet

(exercice : implémenter la méthode QR, en utilisant, soit une fonction "qr", soit en reprogrammant cette fonction)

4) Méthode de Givens-Hauseholder

Cette méthode recherche une valeur propre particulière (la $k^{ème}$) d'une matrice symétrique, en utilisant son polynôme caractéristique.

Elle comprend 2 étapes :

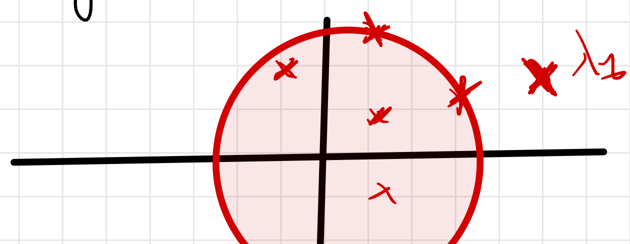
→ Transformation de A en une matrice tridiagonale, semblable par matrices de Hausholder.

→ Construction d'une suite de Sturm de polynômes permettant de localiser la $k^{ième}$ racine du polynôme caractéristique de A.

(construction et preuve complètes dans [Ciarlet]).

5) Méthode de la puissance

L'objectif est de rechercher un vecteur propre pour une valeur propre spécifique d'une matrice, en l'occurrence la plus grand en module.



Cette méthode est utilisée dans de nombreuses situations applicatives (matrice de Google, modèle de Leslie)

On a le théorème (définissant l'algorithme) suivant :

Théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisable et possédant une plus grande valeur propre en module :

$$|\lambda_p| \leq |\lambda_{p-1}| \dots \leq |\lambda_2| < |\lambda_1|$$

On construit la suite (r_k) telle que

$$\star \; r_0 \notin \bigoplus_{i \neq 1} E_{\lambda_i} \;, \; \|r_0\| = 1$$

$$\star \quad r_{k+1} = \frac{A r_k}{\|A r_k\|}$$

Alors, la suite (r_k) converge vers un vecteur propre de A, associé à la valeur propre λ_1.

preuve :

on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ et on note

$$r_0 = \underbrace{u}_{\in E_{\lambda_1} \setminus \{0\}} + \sum_{i=2}^{p} u_i \text{ (par hypothèse)}$$

On a

$$r_1 = \frac{\lambda_1 u + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i}{\|\lambda_1 u + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i\|} \text{ soit}$$

$$r_1 = \frac{u + \sum_{i=2}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} u_i}{\| u + \sum_{i=2}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} u_i \|}$$ $| \; | < 1$

On montre alors facilement que

$$r_k \to \frac{u}{\|u\|}, \text{ vecteur propre}$$

de A associé à λ_1 //

Remarque : cette méthode s'étend à la recherche d'un vecteur propre associé à la $k^{\text{ième}}$ valeur propre de A, par la méthode de la puissance inverse : voir poly, ou [Ciarlet]

Exercice : implémenter et illustrer la méthode de la puissance sur un exemple de votre choix

A envoyer : méthode puissance test sur un exemple :

$$A = \underbrace{P}_{\text{aléatoire}} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{(marche)}$$

et

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & n & \\ 0 & & & & -n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{(ne marche pas)}$$

(calculer " $\frac{Ar_k}{r_k}$ ")