Résolution de systèmes non linéaires

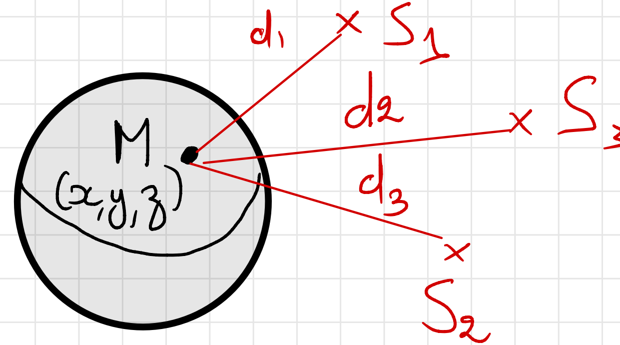
1

Problème à résoudre numériquement : Calculer de manière approchée la solution (supposée unique) du système d'équations non linéaires :

$$\boxed{\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots x_n) = 0 \end{cases}} \quad (*)$$

Exemples :

→ GPS (Global Positioning System)



(x, y, z) solution d'un système non linéaire :

$$\begin{cases} d(M, S_1) = d_1 \\ d(M, S_2) = d_2 \\ d(M, S_3) = d_3 \end{cases}$$

(exemple numérique : voir feuille TP + solution Python)

→ (texte) : équilibre chimique

* On présente différentes méthodes de résolution de (*), pour $n=1$, ou $n \geq 2$

* Auparavant, on s'intéresse aux systèmes écrits sous la forme

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} g_1(x_1, \dots x_n) = x_1 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots x_n) = x_n \end{array}\right.} \quad (**)$$

1) Méthodes itératives par la résolution d'un système (**)

On énonce le théorème de Picard :

Théorème : soit A un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

(i) A stable par g : $g(A) \subset A$

(ii) g strictement contractante par $\| \ \|$:
$\forall (x,y) \in A^2$,
$\|g(x) - g(y)\| \leq K \|x - y\|$ où $K \in [0, 1[$.

Sous ces hypothèses, il existe un unique $x^* \in A$, tel que $g(x^*) = x^*$.

De plus la suite itérative :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 \in A \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{array}\right.$$

est telle que :

* x_k vers vers x^* de manière géométrique :

$$\|x_k - x^*\| \leq K^k \frac{\|x_1 - x_0\|}{1-K}$$

preuve :

→ unicité de x^* : immédiat avec le caractère strictement contractant de g.

→ existence de x^* : découle de l'algorithme de construction.

→ algorithme : on montre que $(x_k)_k$ est de Cauchy : en effet

$(k>\ell)$

$$\|x_k - x_\ell\| \leq \|x_k - x_{k-1}\| + \dots \|x_{\ell+1} - x_\ell\|$$

$$\leq K^{k-1}\|x_1 - x_0\| + \dots + K^\ell \|x_1 - x_0\|$$

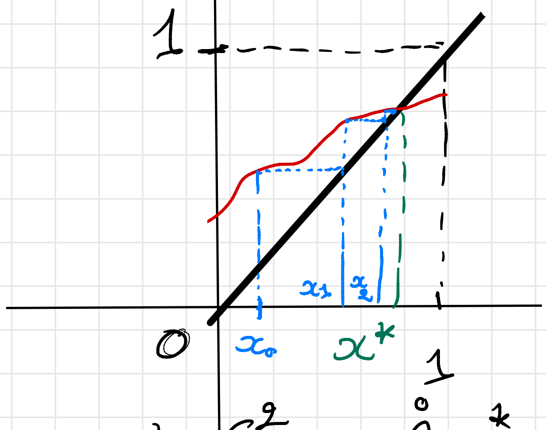
$$\leq \frac{K^\ell}{1-K}\|x_1 - x_0\| \to 0 \text{ qd } \ell \to +\infty$$

Comme A est fermé dans $\mathbb{R}^n$ complet, la suite converge vers $x^* \in A$. Par passage à la limite, on a $x^* = g(x^*)$. L'estimation

$$\|x^* - x_\ell\| \leq \frac{K^\ell}{1-K}\|x_1 - x_0\|$$

s'en déduit également par passage à la limite

Exemple : si $n=1$.



Si de plus, g est C^2 sur $\mathring{A}$, $x^* \in \mathring{A}$, et que $Dg(x^*) = 0$, alors la convergence de (x_k) vers x^* est plus rapide puisqu'elle est quadratique :

$$\|x_{k+1} - x^*\| = O(\|x_k - x^*\|^2)$$

$$\begin{cases} (\,)\text{ géométrique} \equiv \rho^k \quad \text{avec } \rho < 1 \\ \text{quadratique} \equiv (\rho)^{2^k} \end{cases}$$

En effet, avec Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$\underbrace{g(x_k)}_{x_{k+1}} = g(x^*) + \cancel{Dg(x^*)\cdot(x_k - x^*)} + O(\|x_k - x^*\|^2)$$

Cela va permettre de construire une méthode quadratique par résoudre le système (*) en se ramenant à un système (**) par lequel $Dg(x^*) = 0$.

2) Méthode de Newton par la résolution d'un système (*)

Théorème : soit $f : A \to \mathbb{R}^n$, C^3 sur A ouvert et soit $x^* \in A$ tq $f(x^*) = 0$. On suppose de plus que $Df(x^*)$ isomorphisme (si $n = 1$, $f'(x) \neq 0 \Rightarrow$ unicité locale)

Alors, il existe un voisinage V de x^* dans A, tel que la suite

$$\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} \cdot f(x_k) \end{cases}$$

converge vers x^* de manière quadratique.

preuve : comme $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, il existe $\tilde{V}$ voisinage de x^* sur lequel $Df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$. On construit alors

$$g : \begin{pmatrix} \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto x - Df(x)^{-1} \cdot f(x) \end{pmatrix}$$

On a

* $g(x^*) = x^* - Df(x^*)^{-1} \cdot \cancel{f(x^*)} = x^*$; 0

* g est C^2 sur $\tilde{V}$ et

$$D(g)(x^*) = I - D(Df(x)^{-1}) \cdot \cancel{f(x^*)} - Df(x^*)^{-1} \cdot Df(x^*)$$

0

6

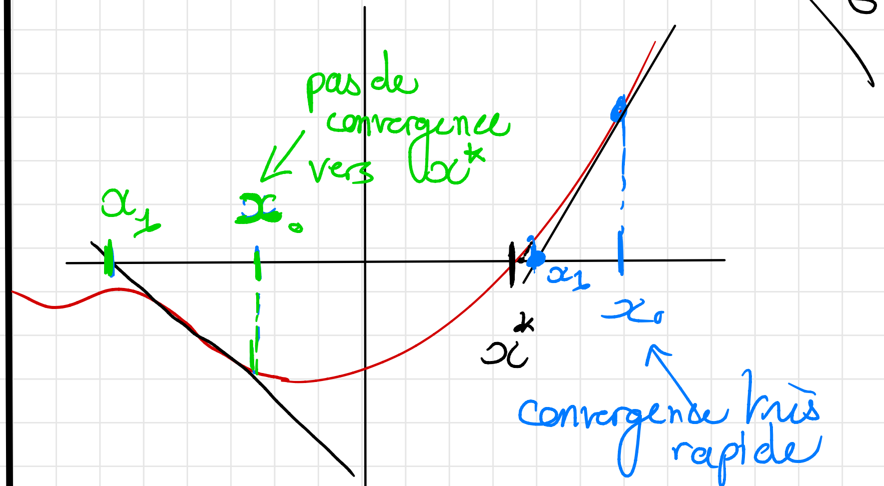
soit $D(g)(x^*) = 0$

On est bien dans le cadre du cas particulier du théorème de Picard appliqué à g. //

Cas particulier : $n = 1$. Dans ce cas, la méthode s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}}$$

Elle possède une interprétation géométrique :

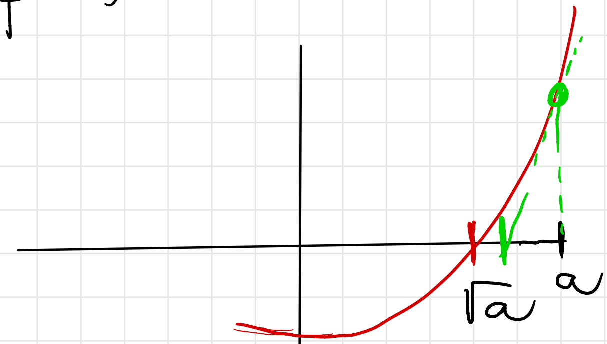


Il existe certains cas particuliers (par exemple si f est polynomiale) où il est possible de décrire plus précisément le bassin d'attraction de x^* (c'est à dire V) : voir exemple dans [Dem].

* Le cas le plus "célèbre" concerne

La recherche d'une racine carrée par la méthode de Newton :

ici $f(x) = x^2 - a$



Newton s'écrit :

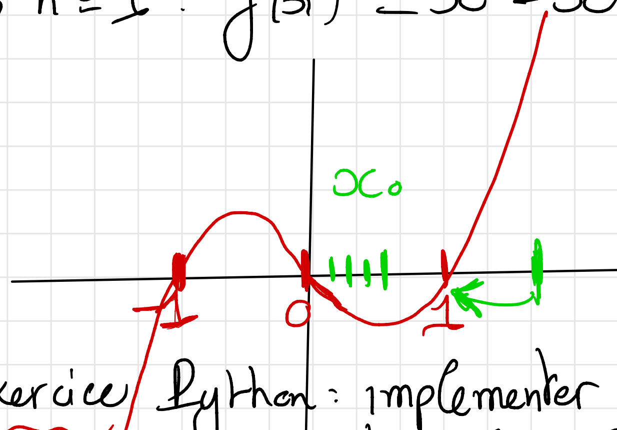
$$\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = x_k - \underbrace{\dfrac{x_k^2 - a}{2x_k}}_{} \end{cases}$$

$\frac{1}{2}\left(x_k + a/x_k\right)$

On peut choisir $x_0 \in [a, +\infty[$ et la méthode converge toujours vers $\sqrt{a}$.

+ Une application originale concerne la création de fractales avec Newton, en utilisant la notion de chaos relativement à son initialisation.

(si $n=1$: $f(x) = x^3 - x$)

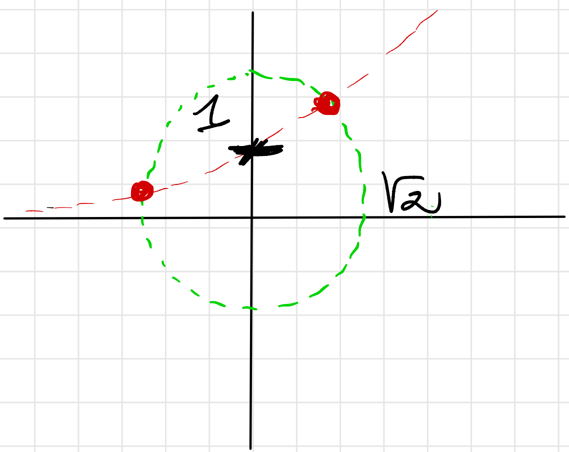


Exercice Python : implementer Newton sur 2 exemples : le GPS (voir

TD2) et sur un exemple "académique" :

résolution du système :

$$\begin{cases} e^{x} - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$



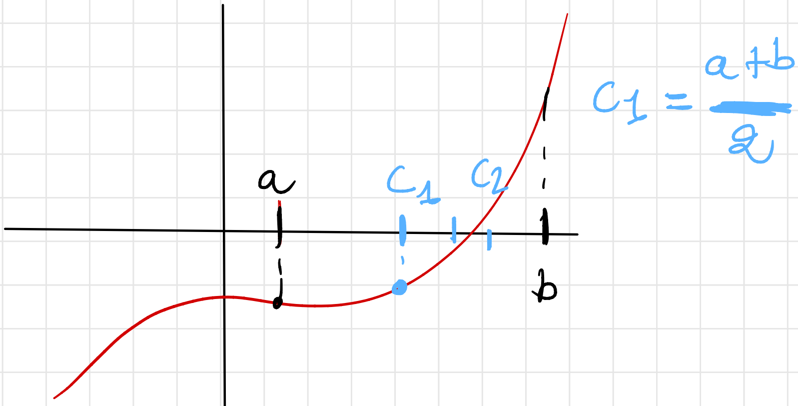
3) Autres méthodes si $n = 1$

Il existe des méthodes spécifiques au cas $n = 1$:

- → dichotomie
- → fausse position
- → sécante

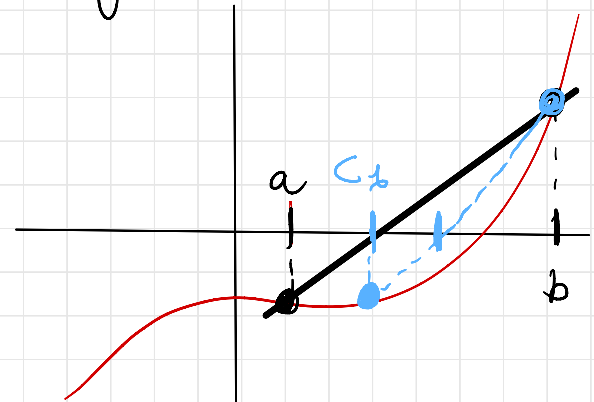
(voir TD 2)

Par la dichotomie :



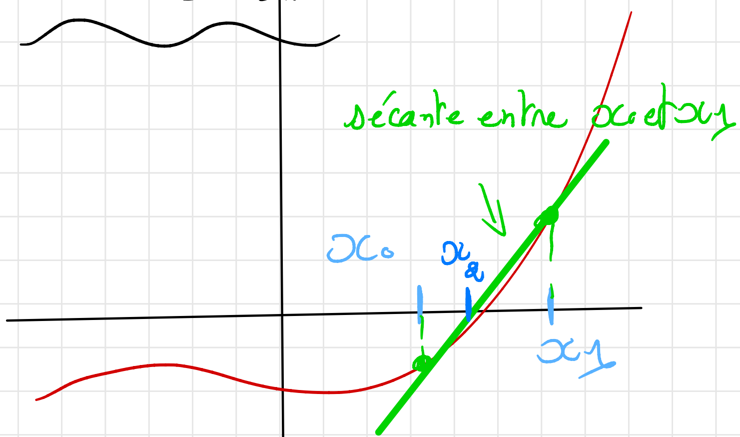
→ convergence assurée si $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ $f(a)f(b) < 0$ et f monotone strictement, avec une vitesse de convergence en $O\left(\frac{1}{2^k}\right)$ (géométrique)

Par la fausse position :



→ convergence assurée mais pas forcement meilleure que la dichotomie.

Par la sécante :



Elle s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} x_0,\ x_1 \in V \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \end{cases}$$

On peut montrer un résultat de convergence similaire à celui de Newton (convergence locale), et une vitesse de convergence entre l'ordre 1 (géométrique) et l'ordre 2 (quadratique), en l'occurence un ordre $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\|x_{k+1} - x^*\| = O(\|x_k - x\|^p)$$

Cette méthode présente aussi un risque numérique en raison de divisions par des valeurs très petites.