Séance 21 : résolution d'équations différentielles, aspects numériques : consistance, stabilité, convergence et ordre

I) Rappels et notations

Pb à résoudre :

$$(1)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

avec $f : [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, continue et globalement Lipschitzienne par rapport à sa $2^{\text{ème}}$ variable :

$\exists L > 0, \forall (t, y_1, y_2) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,$

$\| f(t, y_2) - f(t, y_1) \| \leq L \| y_2 - y_1 \|$

(sous ces conditions, il existe une unique solution $y \in C^1([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^m)$)

* Pb discret approché :

$$(2)\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)\, \Phi(t_n, y_n, t_{n+1} - t_n) \quad (n \in [\![0, N-1]\!]) \\ y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

avec : $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ subdivision de $[t_0, t_0+T]$, y_n : approximation de $y(t_n)$ et $\Phi : [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \times [0, T] \to \mathbb{R}^m$

Cas particulier : méthode d'Euler explicite : $\Phi(t,y,h) = f(t,y)$

*On définit ici les 4 notions essentielles par un schéma : consistance, stabilité, convergence et ordre, puis on donne une C(N)S sur Φ pour vérifier ces 4 propriétés.

Par des raisons de simplicité, on prend par la suite un pas constant :

$$\Delta T = T/N \quad (\text{et } t_{n+1} - t_n = \Delta T)$$

II Définition des 4 notions

Def 1 (consistance) : un schéma de type (2) est consistant si la quantité :

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T\, \Phi(t_n, y(t_n), \Delta T)$$

(où y est la solution de (1)) est telle que :

$$\lim_{N \to +\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n|}_{\|\varepsilon\|_1} = 0$$

erreur de consistance

Def 2 (stabilité) si on considère le schéma perturbé :

$$(2b) \begin{cases} z_{n+1} = z_n + \Delta T\, \Phi(t_n, z_n, \Delta T) + \varepsilon_n \\ z_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

on dit que la méthode (2) est stable

erreurs sur la solution

si
$$\underset{0\le n\le N}{\mathrm{Max}} |y_n - z_n| \le M |y_0 - z_0| + M' \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n|$$

erreurs d'évaluation

(où M et M' sont 2 constantes indépendantes de N, y_0, z_0, ε_n)

* Def 3 (convergence) : on dit que la méthode (2) est convergente si

$$\lim_{\substack{N \to +\infty \\ y_0 \to y(t_0)}} \left(\underset{0\le n\le N}{\mathrm{Max}} |y_n - y(t_n)| \right) = 0$$

erreurs "(2) - (1)" en norme infinie

* Def 4 (ordre) : la méthode (2) est d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si : f et Φ sont C^p et si

$\|\varepsilon\|_1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| = O((\Delta T)^p)$$

où ε_n représente l'erreur de consistance :

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T \,\Phi(t_n, y(t_n), \Delta T)$$

Il existe un lien important entre ces 4 propriétés pouvant se résumer en :

"consistance + stabilité $\Rightarrow$ convergence"

Théorème : si un schéma de type (2) est consistant et stable, alors il est convergent.

preuve : on a :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta T\, \Phi(t_n, y_n, \Delta T)$$

et

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta T\, \Phi(t_n, y(t_n), \Delta T) + \varepsilon_n$$

où $\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T\, \Phi(t_n, y(t_n), \Delta T)$

En notant $z_n = y(t_n)$, et en utilisant la stabilité du schéma, on a :

$$\text{Max} |\underbrace{y_n - y(t_n)}_{z_n}| \leq M |\underbrace{y_0 - y(t_0)}_{z_0}| + M \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n|$$

avec $\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| = \|\varepsilon\|_1$

erreur de consistance

Avec la consistance du schéma, on a

donc : $\lim_{N \to +\infty} \|\varepsilon\|_1 = 0$

Ainsi, on a bien :

$$\lim_{\substack{N \to +\infty \\ y_0 \to y(t_0)}} \ \text{Max}_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| = 0$$

et le schéma (2) est convergent.

On relie à présent ces 4 notions à des propriétés simples sur Φ.

III) Propriétés de la fonction Φ associées aux 4 notions

On a les 3 théorèmes suivants :

Théorème 1 (CNS de consistance)
une méthode de type (2) est consistante si et seulement si
$\forall (t, y, h) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \times [0, T]$,
$$\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

Théorème 2 (CS de stabilité)
une méthode de type (2) est stable si Φ est Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, c'est à dire :
$\forall (t, y_1, y_2, h) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [0, T]$,
$$\| \Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h) \| \leq \Lambda \| y_2 - y_1 \|$$

Corollaire : une méthode de type (2) est convergente si Φ vérifie les 2 propriétés précédentes (Th 1 et Th 2)

Théorème 3 : une méthode de type (2) est d'ordre p (au moins) si et seulement si Φ et f sont C^p et
$\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$, $\forall (t, y) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m$,
$$\left. \frac{\partial^l \Phi(t, y, h)}{\partial h^l} \right|_{h=0} = \frac{1}{l+1} f^{[l]}(t, y)$$

où $f^{[\ell]}$ désigne la $\ell^{ème}$ dérivée totale

def :

$$\begin{cases} f^{[0]} = f \text{ et} \\ \underbrace{f^{[k+1]}}_{m\times 1} = \partial_t \underbrace{f^{[k]}}_{m\times 1} + \underbrace{\partial_y f^{[k]}}_{m\times m} \cdot \underbrace{f}_{m\times 1} \end{cases}$$

Avec ces résultats appliqués à la méthode d'Euler explicite, on retrouve que la méthode d'Euler est convergente car :

$\Phi(t,y,0) = f(t,y) \Rightarrow$ consistance

Φ est L-Lipschitz % à $y \Rightarrow$ stabilité

$\Longrightarrow$ convergence

L'ordre est égal à 1 (si f est C^1)

car

$$\frac{\partial^0}{\partial h^0} \Phi(t,y,h)\Big|_{h=0} = f(t,y)$$

et

$$\frac{\partial^1}{\partial h^1} \Phi(t,y,h)\Big|_{h=0} = 0 \neq f^{[1]}(t,y)$$

(si $\Phi(t,y,h) = f(t,y)$)

(pas d'ordre 2).

On démontre à présent ces théorèmes :

preuve du théorème 1 :

on réécrit l'erreur de consistance sous une forme différente :

7

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T\,\Phi(t_n, y(t_n), \Delta T)$$

$$= \Delta T\,\underbrace{y'(c_n)}_{f(c_n, y(c_n))} - \Delta T\,\Phi(t_n, y(t_n), \Delta T) \quad (c_n \in [t_n, t_{n+1}])$$

$$= \Delta T(\alpha_n + \beta_n) \text{ où}$$

$$\begin{cases} \alpha_n = f(c_n, y(c_n)) - \Phi(c_n, y(c_n), 0) \\ \beta_n \ \ \Phi(c_n, y(c_n), 0) - \Phi(t_n, y(t_n), 0) \end{cases}$$

En introduisant la fonction

$$\Phi \left(\begin{array}{l} t \longmapsto \Phi(t, y(t), 0) \\ [t_0, t_0+T] \longrightarrow \mathbb{R}^m \end{array} \right), \Phi$$

est C^0, donc U.C. sur $[t_0, t_0+T]$,

on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta T |\beta_n| \leq \varepsilon \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta T \right) = \varepsilon T$$

par N assez grand ($\varepsilon > 0$ fixé)

Avec la notion d'intégrale de Rieman,

on a

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta T |\alpha_n| = \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t, y(t)) - \Phi(t, y(t), 0)|\, dt$$

* Si la méthode est consistante,

$\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$, ce qui signifie

$$\forall t \in [t_0, t_0+T],\ f(t, y(t)) = \Phi(t, y(t), 0)$$

Si $y^* \in \mathbb{R}^m$ donné, en considérant le problème (1) avec la condition $y(t)=y^*$, le théorème de Cauchy-Lipschitz (existence) permet d'affirmer que $f(t,y^*) = \Phi(t,y^*,0)$ par tout $(t,y^*) \in [t_0,t_0+T] \times \mathbb{R}^m$. //

* Si Φ verifie :
$\Phi(t,y,0) = f(t,y)$
alors, $\sum_{n=0}^{N-1} \Delta T |\alpha_n| \longrightarrow 0$
quand $N \to +\infty$ et ainsi
$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta T |\varepsilon_n| \longrightarrow 0$: la méthode est donc consistante.

preuve du théorème 2

on suppose Φ $-\Lambda$ Lipschitz par rapport à sa seconde variable.

En reprenant les notations de la définition de la stabilité, on a

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + \Delta T |\Phi(t_n, y_n, \Delta T) - \Phi(t_n, z_n, \Delta T)| + |\varepsilon_n|$$

soit :

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n|(1+\Lambda \Delta T) + |\varepsilon_n|$$

En utilisant un lemme de Gronwall discret, on a :

$$|y_n - z_n| \leq e^{n\Lambda\Delta T} |y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{(n-1-i)\Lambda\Delta T} |\varepsilon_i|$$

$$\leq e^{\Lambda T} |y_0 - z_0| + e^{\Lambda T} \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i|$$

M

preuve du théorème 3 : on utilise des arguments similaires au th. 1 (consistance à ordre O''), ainsi que le lien entre y et $f^{[k]}$:

$$y^{(\ell+1)}(t,x) = f^{[k]}(t,x)$$

(si f est C^k)

(voir poly ou [Demailly]).

Remarque : l'ordre d'une méthode est lié à la vitesse de convergence de celle-ci, comme le montre l'inégalité (utilisée dans la preuve "consistance + stabilité ⟹ convergence")

$$\max_{0\le n\le N} |y_n - y(t_n)| \le \underbrace{M|y_0 - y(t_0)|}_{\text{erreur initiale}} + \underbrace{M' \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n|}_{\text{erreur de consistance}}$$

$O((\Delta T)^p)$

(la convergence est en $O((\Delta T)^p)$ si la méthode est d'ordre p)

IV Améliorations de la méthode d'Euler

On cherche à construire des méthodes plus précises que la méthode d'Euler, en remplaçant la méthode des rectangles à gauche, par une méthode plus précise : le point milieu ou les trapèzes. On écrit la formule exacte suivante :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\, ds$$

(rectangles :

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n))$$

On propose à présent :

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f\left(t_n + \frac{\Delta T}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

avec

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta T}{2} f(t_n, y_n)$$

(valeur approchée de $y\left(t_n + \frac{\Delta T}{2}\right)$)

pt milieu

Il s'agit bien d'une méthode de type (2) avec

$$\Phi(t, y, h) = f\Big(\underbrace{t + \frac{h}{2}}_{t}, \underbrace{y + \frac{h}{2} f(t, y)}_{y}\Big)$$

* Consistance ?

$$\Phi(t, y, 0) = f(t + 0, y + 0 f(t, y)) = f(t, y)$$

la méthode est consistante.

* Stabilité ?

$$\|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)\|$$

$$\leq L\left[\left\|\left(y_2 + \frac{h}{2} f(t, y_2)\right) - \left(y_1 + \frac{h}{2} f(t, y_1)\right)\right\|\right]$$

$$\leq L\left[\|y_2 - y_1\| + \frac{|h|}{2} L \|y_2 - y_1\|\right]$$

soit :

$$\|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)\| \leq$$

$$\underbrace{L\left(1 + \frac{LT}{2}\right)}_{\Lambda} \|y_2 - y_1\|$$

la méthode est donc stable.

* convergence ? oui car méthode consistante et stable.

* ordre ?

$p = 1$: OK car $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$

$p = 2$?

on calcule $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, h)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, h) = \frac{1}{2} \partial_t f(\tilde{t}, \tilde{y}) + \frac{1}{2} \partial_x f(\tilde{t}, \tilde{y}) f(t, x)$$

Quand $h = 0$, on a $\tilde{y} = y$ et $\tilde{t} = t$, d'où

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, h)\right|_{h=0} = \frac{1}{2} \partial_t f(t, y) + \frac{1}{2} \partial_x f(t, y) . f(t, y)$$

$$= \frac{1}{2} f^{[1]}(t, y)$$

La méthode est au moins d'ordre 2

Autre méthode possible basée sur les trapèzes :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta T}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_n)\right]$$

avec

$$\tilde{y}_n = y_n + \Delta T f(t_n, y_n)$$

prédiction (Euler exp)

correction ("trapèzes")

On peut montrer (exercice) que cette méthode est consistante, stable, convergente et d'ordre 2.

(Implémentation et vérification de l'ordre sur un exemple : voir cours Euler)

Prochaine séance :

→ famille des méthodes de Runge-Kutta (dont RK 4)

→ test et implémentation de schémas sur des exemples et des modélisations (réacteur biogaz à lire)