

Séance 22 : résolution numérique des équations différentielles : les méthodes de Runge-Kutta

Rappel des notations :

* Pb exact :

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

* Schema numérique

$$(2) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) \Phi(t_n, y_n, t_{n+1} - t_n) \\ y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases} \quad (n \in [0, N-1])$$

où $t_0 < t_1 \dots < t_N = t_0 + T$: subdivision et y_n approche $y(t_n)$.

Rappel des propriétés

→ consistance (CNS) : $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$

→ stabilité (CS) : Φ Δ -Lipschitz par rapport à sa 2^{ème} variable.

→ convergence (si consistance et stabilité)

→ ordre (CNS) : ordre $\geq p$ ssi :

$$\frac{\partial^{\ell} \Phi(t, y, h)}{\partial h^{\ell}} \Big|_{h=0} = \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(t, y)$$

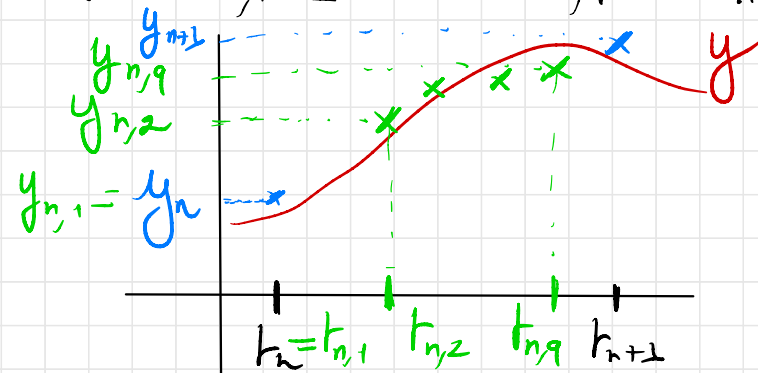
si $0 \leq \ell \leq p-1$

I) Description des méthodes de Runge-Kutta

Pour passer de y_n à y_{n+1} , on calcule des valeurs intermédiaires

$y_{n,1}, \dots, y_{n,q}$, représentant des approximations de y en des points intermédiaires dans $[t_n, t_{n+1}]$:

$$t_n \leq t_{n,1} \leq \dots \leq t_{n,q} \leq t_{n+1}$$



Pour calculer les valeurs $y_{n,1}, \dots, y_{n,q}$, on utilisera une approximation de la relation exacte:

$$y(t_{n,i}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(s, y(s)) ds$$

($1 \leq i \leq q$)

et on calculera ensuite y_{n+1} à partir de la relation

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$$

en utilisant à chaque fois une méthode de quadrature (rectangles, trapèzes, Simpson, ...)

On utilise les notations suivantes :

$$* t_{n,i} = t_n + c_i (t_{n+1} - t_n) /$$

où $c_1 = 0 \leq c_2 \leq \dots \leq c_q \leq 1$

$$* y_{n,i} = y_n + \Delta T \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} f(t_{n,j}, y_{n,j})$$

($2 \leq i \leq q$) ($y_{n,1} = y_n$)

où $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq i-1}}$ sont des réels positifs.

$$* y_{n+1} = y_n + \Delta T \sum_{j=1}^q b_j f(t_{n,j}, y_{n,j})$$

où $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ sont des réels positifs.

On note ces trois familles, caractérisant la méthode sous la forme d'un tableau

triangulaire :

$$\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ c_2 & a_{2,1} \end{array} \quad 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} c_q & a_{q,1} & \dots & a_{q,q-1} & 0 \\ \mathbf{1} & b_1 & b_2 & \dots & b_{q-1} & b_q \end{array}$$

← méthodes de quadrature

* Remarque : les méthodes vues à la séance précédente entrent dans ce cadre :

→ Euler explicite : $q = 1$

$$\begin{array}{c|c} t_{n,1} \rightarrow 0 & 0 \\ \hline & 1 \quad 0 \end{array} \leftarrow \text{rectangles à gauche}$$

→ point milieu :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta T f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta T, y_n + \frac{1}{2}\Delta T f(t_n, y_n)\right)$$

$$q=2 \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{rect. à gauche} \\ \leftarrow \text{pt milieu} \end{array}$$

→ méthode issue des trapèzes (Heun) :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta T}{2} \left[f(t_n, y_n) + f\left(t_n + \Delta T, y_n + \Delta T f(t_n, y_n)\right) \right]$$

$$q=2 \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{rect. à gauche} \\ \leftarrow \text{trapèzes} \end{array}$$

II) Propriétés des méthodes / 4 de Runge Kutta

Il s'agit de méthodes à un pas de type (2) avec :

$$\Phi(t, y, h) = \sum_{j=1}^q b_j f(t + c_j h, y_j)$$

où

$$y_i = y + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t + c_j h, y_j)$$

On étudie les 4 propriétés pour une telle fonction :

* Consistance : le schéma est consistant ssi

$$\sum_{j=1}^q b_j = 1$$

Il s'agit d'une propriété correspondant à l'ordre 0 pour la méthode de quadrature utilisée.

On impose de même qu'on ait :

$\forall i \in \{1, \dots, p\}$

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i$$

* Stabilité : on calcule

$\|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)\|$ et on le majore par $\Delta \|y_2 - y_1\|$ où

$$\Delta = L \sum_{j=1}^q |b_j| (1 + (\alpha L T) + \dots + (\alpha L T)^{j-1})$$

$$\text{où } \alpha = \max_{1 \leq i \leq q} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \right)$$

→ Les méthodes de Runge-Kutta sont donc stables.

* Convergence : sous les 2 conditions précédentes, les méthodes de Runge-Kutta sont convergentes.

* Ordre : on calcule $\frac{\partial^i \Phi(x, y, h)}{\partial h^i} \Big|_{h=0}$

et on montre que la méthode est d'ordre 2 si f est C^2 et :

$$\sum_{j=1}^q b_j c_j = \frac{1}{2}$$

(on le vérifie sur les 2 méthodes vues).

Il existe des conditions sur les coefficients $(a_{ij}), (b_j), (c_i)$ (de plus en plus complexes) permettant d'obtenir des méthodes de tous ordres

On peut ensuite montrer qu'il existe bien des méthodes de Runge-Kutta de tous ordres, en augmentant la valeur de q :

* Pour $q=4$, il existe une méthode d'ordre 4:

pts	0	0			
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
	1	0	0	1	0
	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

← red. à gauche
 ← red. à droite
 ← pt milieu
 ← Simpson

pois

qu'on appelle méthode RK4.

* si $5 \leq q \leq 7$, il existe des méthodes d'ordre $q-1$.

* si $q \geq 8$, il existe des méthodes d'ordre $q-2$.

La méthode RK4 offre en réalité le meilleur compromis précision / simplicité.

III) Implémentation

(Exercice) on peut comparer les précisions des différentes

méthodes, Euler, pt milieu, Heun, RK4, sur l'exemple du modèle de Volterra: 7

$$\begin{cases} y_1'(t) = a y_1(t) - b y_1(t) y_2(t) \\ y_2'(t) = -c y_2(t) + d y_1(t) y_2(t) \end{cases}$$

$(a, b, c, d > 0)$ et $(y_1(0), y_2(0)) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

