Séance 23a : systèmes d'équations différentielles linéaires : étude théorique

1) Généralités. Théorème fondamental

On s'intéresse au système d'EDO linéaires du 1^{er} ordre suivant :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t) \quad (1)$$

avec $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $B : I \to \mathbb{K}^n$ fonctions continues (I : intervalle de $\mathbb{R}$)

Il s'agit d'un cas particulier des systèmes du type $y' = f(t, y(t))$ vus précédemment.

On remarque que f est ici Lipschitzienne en sa variable y, de rapport $k(t) = |||A(t)|||$. Comme k est bornée sur tout compact inclus dans I, le théorème de Cauchy-Lipschitz global permet d'assurer l'existence et l'unicité de Y solution de (1) telle que $Y(t_0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$.

On le redémontre ici :

2

Théorème (Cauchy-Lipschitz linéaire)
le système d'EDO linéaires (1) admet une unique solution Y sur I telle que $Y(t_0) = \tilde{Y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

preuve : on remarque que Y solution de (1) telle que $Y(t_0) = \tilde{Y}_0$ ssi :

$$Y(t) = \tilde{Y}_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)Y(s) + B(s))\,ds$$

On se place sur J compact de I sur lequel, $|||A(t)||| \leq \alpha$ et $\|B(t)\| \leq \beta$

On construit la suite $(Y_n(t))_{n \geq 0}$ telle que $Y_0 \equiv \tilde{Y}_0$ et

$$Y_{n+1}(t) = \tilde{Y}_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)Y_n(s) + B(s))\,ds$$

On a $\|Y_1 - Y_0\|_\infty \leq (\alpha \|Y_0\| + \beta)|t - t_0|$

et plus généralement (récurrence) :

$$\|Y_{n+1} - Y_n\|_\infty \leq (\alpha \|Y_0\| + \beta) \frac{\alpha^n |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

série convergente

Par majoration,

$\sum_n \|Y_{n+1} - Y_n\|_\infty$ est convergente.

Comme $\mathbb{R}^n$ est complet,

$\sum (Y_{n+1} - Y_n)$ est AC, donc convergente dans $(\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n), \| \|_\infty)$. Ainsi,

$Y_n \xrightarrow{CU} Y \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$.

Y vérifie bien l'équation intégrale équivalente à (1) ($\rightsquigarrow$ existence)

Par l'unicité sur J, si Y_1 et Y_2 sont solutions, alors $Y = Y_1 - Y_2$ vérifie $Y'(t) = A(t)Y(t)$ et $Y(t_0) = 0$. Comme précédemment, on a $\|Y(t)\|_\infty \leq M\alpha^n \frac{|t-t_0|^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi, $Y \equiv 0$ ($\rightsquigarrow$ unicité)

Comme, si $t \in I$, alors il existe J compact tel que $t \in J \subset I$, on en déduit le résultat sur I //

Remarques :

* On a le principe général de décomposition : $Y(t) = Y_H(t) + Y_p(t)$ où Y_H : solution générale de l'EDO homogène : $Y'(t) = A(t)Y(t)$ et Y_p : solution particulière de (1).
* En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{ Y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n) \,/\, Y'(t) = A(t)Y(t) \},$$

$\mathcal{S}$ est un sev de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, de dimension n (avec l'isomorphisme :

$$\sigma : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ Y & \longmapsto & Y(t_0) \end{array} \right))$$

2) Cas particuliers

2.1) Cas $A(t) \equiv A$ et $B \equiv 0$

On s'intéresse au système d'EDO

$$Y'(t) = A\,Y(t) \quad (1)_{bis}$$

Cas 1 : si A est diagonalisable, le système peut se séparer par changement de variable et

$$\mathcal{S} = \left\{ Y : t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} V_i \quad (\alpha) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: valeurs propres de A et $V_1, \dots, V_n$: vecteurs propres associés.

Cas 2 : si A n'est pas diagonalisable, on utilise l'exponentielle de matrice :

Théorème : l'ensemble des solutions de $(1)_{bis}$ s'écrit :

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}\, Y(t_0)$$

(où $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$)

(pour calculer e^{tA}, on peut utiliser une décomposition de A de type Jordan :

$$A = \underset{\text{diag.}}{D} + \underset{\text{nilpotente}}{N} \quad \text{avec } DN = ND \text{)}$$

2.2) Cas où $A(t) \equiv A$ et B quelconque

On utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution de

$$Y'(t) = A\,Y(t) + B(t) \qquad (1)_{ter}$$

sous la forme :

$Y(t) = e^{tA} C(t)$. On doit avoir $e^{tA} C'(t) = B(t)$ soit

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s)\,ds$$

puis la solution particulière de $(1)_{ter}$:

$$Y_P(t) = e^{tA} C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\,ds$$

2.3) Cas d'une EDO scalaire d'ordre p

On s'intéresse à l'EDO :

$$a_p y^{(p)}(t) + \dots + a_0 y = 0 \qquad (1)_*$$

où $a_p \in \mathbb{C}^*$, $a_{p-1}, \dots a_0 \in \mathbb{C}$.

Il s'agit d'un cas particulier de 2.1) avec

$$A = p\updownarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ c_0 & \dots & \dots & c_{p-1} \end{pmatrix}$$

avec $c_j = -\dfrac{a_j}{a_p}$.

Le polynôme caractéristique de A

est :

$$P(\lambda) = a_p \lambda^p + \dots + a_0$$

* Si P possède p racines simples complexes, alors :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e^{\lambda_i t}, \ (\alpha_i) \in \mathbb{C}^p \right\}$$

(sev de dimension p)

* si P possède des racines multiples :

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{q} (x - \lambda_i)^{n_i} \quad (n_i \geq 1)$$

alors une base de $\mathcal{S}$ est formée des fonctions :

$$t \mapsto e^{\lambda_1 t}, \dots, t \mapsto t^{n_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \dots \dots t \mapsto t^{n_q - 1} e^{\lambda_q t}$$

Dans le cas non homogène :

$$a_p y^{(p)} + \dots + a_0 y = b(t),$$

si on note $v_1, \dots v_p$ une base de solutions de l'équation homogène associée, alors on cherche une solution particulière de la forme :

$$v(t) = \alpha_1(t) v_1(t) + \dots + \alpha_p(t) v_p(t)$$

Il suffit alors de résoudre :

$$\begin{cases} \alpha_1' v_1 + \dots + \alpha_p' v_p = 0 \\ \alpha_1' v_1' + \dots + \alpha_p' v_p' = 0 \\ \alpha_1' v^{(p-2)} + \dots + \alpha_p' v_p^{(p-2)} = 0 \\ \alpha_1' v^{(p-1)} + \dots + \alpha_1' v_p^{(p-1)} = \frac{1}{a_p} b(t) \end{cases}$$

7

Or, le déterminant

$$\begin{vmatrix} v_1(t) & \cdots & v_p(t) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{(p-1)}(t) & & v_p^{(p-1)}(t) \end{vmatrix}$$

est non nul (sinon, il existe une combinaison linéaire nulle entre les colonnes :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i^{(j)}(r) = 0$$

$(0 \leq j \leq p-1)$

et $Y(r) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$ est solution de (1) telle que $Y(t_0) = Y'(t_0) = \cdots = Y^{(p-1)}(t_0) = 0$

Ainsi, $Y = 0$, ce qui est absurde)

On peut alors calculer par intégration $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ et en déduire une solution particulière de l'équation non homogène.

Exemple : résoudre l'ED :

$$\boxed{y'' + 4y = \tan t}$$

sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Etape 1 : solution de l'EDO homogène $y'' + 4y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 4 \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = 2i \\ r_2 = -2i \end{array}\right\}$

* solutions à valeurs complexes :

$$y(t) = \alpha_1 e^{2it} + \alpha_2 e^{-2it}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C})$$

* solutions à valeurs réelles :

$$y(t) = \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

Etape 2 : solution particulière :

variation des constantes.

On cherche $\lambda_1'(t)$ et $\lambda_2'(t)$ telle que

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)\cos(2t) + \lambda_2'(t)\sin(2t) = 0 \\ \lambda_1'(t)(-2\sin(2t)) + \lambda_2'(t)(2\cos(2t)) = \tan(t) \end{cases}$$

On trouve :

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) = -\frac{1}{2}(1-\cos(2t)) \\ \lambda_2'(t) = \frac{1}{2}\tan(t)\cos(2t) \\ \qquad = \dots = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}\tan t \end{cases}$$

Par intégration, il vient :

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) \\ \lambda_2(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\underbrace{\cos(t)}_{>0}) \end{cases}$$

et au final :

$$\boxed{\begin{gathered} y(t) = -\frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\ln(\cos(t)) \\ + \lambda_1\cos(2t) + \lambda_2\sin(2t) \\ (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}) \end{gathered}}$$

3) Retour au cas général : notion de résolvante

Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre de manière explicite les systèmes généraux :

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t)$$

(1)

Par le système homogène : $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$, il existe un outil, appelé résolvante.

Déf : soit $(t_0, t) \in I$, on appelle résolvante du système

$(1)_H : Y'(t) = A(t)\,Y(t)$,

l'application linéaire :

$$R(t, t_0) : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & Y(t) \end{array}\right)$$

où Y est solution de $(1)_H$ tq $Y(t_0) = V$

(on lui associe sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

On a donc, si Y solution de $(1)_H$:

$$\underbrace{Y(t)}_{\text{vecteur}} = \underbrace{R(t, t_0)}_{\text{matrice}}\,\underbrace{Y(t_0)}_{\text{vecteur}}$$

Remarque : si $A(t) \equiv A$, alors

$$R(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}$$

On a les propriétés générales suivantes :

(i) $R(t,t) = Id$

(ii) $R(t_2,t_1)R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0)$

(iii) $R(\cdot,t_0)$ est solution de l'EDO :

$$\frac{dM(t)}{dt} = A(t)M(t)$$

où $M : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

avec $M(t_0) = Id$

Exemple : si la fonction $t \mapsto A(t)$ est telle que $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$, alors

$$R(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)$$

(vient de (iii))

(cette formule n'est pas vraie sans cette hypothèse).

Dans le cas de l'équation (1) générale, la méthode de variation de la constante conduira à la solution :

$$Y(t) = \underbrace{R(t,t_0)}_{\text{matrice}}\underbrace{V}_{\mathbb{R}^n} + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)\,ds$$

On peut également définir le Wronskien :

Déf : si $Y_1, \dots, Y_n$, ensemble de solution de $(1)_H$, alors on note
$$W(t) = \det(Y_1, \dots, Y_n)$$

On peut alors montrer le résultat suivant :

$$* \quad W(t) = \det(R(t,t_0)) \underbrace{\det(Y_1(t_0), \dots, Y_n(t_0))}_{W(t_0)}$$

puis :

$$\det(R(t,t_0)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))\,ds\right)$$

(en particulier, si $W(t_0) \neq 0$, alors $W(t) \neq 0$)