Séance 23b : compléments d'algèbre linéaire

1) Problème aux moindres carrés

Ce problème, fréquemment rencontré en pratique, concerne la résolution d'un système linéaire non carré :

" $Bx = c$ " où

$B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m > n$

et $c \in \mathbb{R}^m$ ($x \in \mathbb{R}^n$: inconnue à déterminer)

Déf : un problème aux moindres carrés consiste à rechercher $u \in \mathbb{R}^n$ tel que

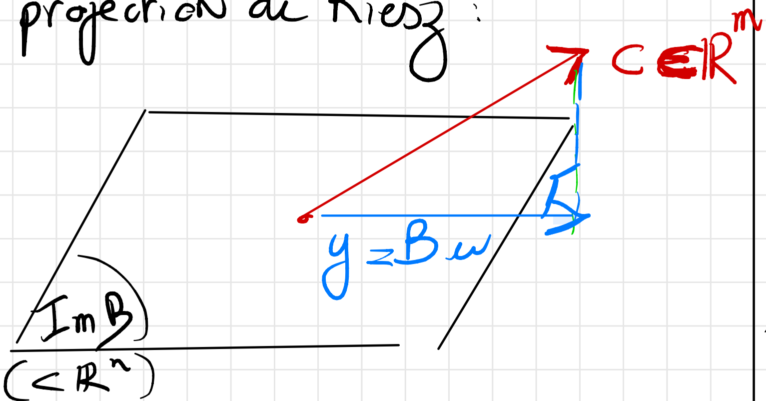
$$\boxed{\|Bu - c\|_n^2 = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|Bx - c\|_n^2}$$

Théorème : le problème précédent revient à rechercher les solutions du système carré $n \times n$:

$$\boxed{\underbrace{{}^tBB}_{n\times n}\ \underbrace{u}_{n\times 1} = \underbrace{{}^tB}_{n\times m}\ \underbrace{c}_{m\times 1}}$$

Il existe toujours une solution à ce système. Elle est unique ssi $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$

preuve : on peut le démontrer géométriquement avec le théorème de projection de Riesz :



Il existe un unique $y \in \mathrm{Im}(B)$ (fermé, convexe de $\mathbb{R}^m$) tq

$$\|y - c\| = \inf_{v \in \mathrm{Im}(B)} \|v - c\|$$

si B est injective, $y = Bu$ et u est unique.

De plus, on a :

$$\langle c - Bu, Bv \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

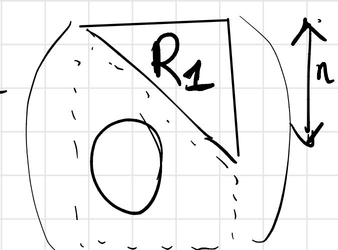
soit :

$$\langle {}^tBc - {}^tBBu, v \rangle = 0 \text{ et}$$

$${}^tBBu = {}^tBc$$

D'un point de vue pratique, l'équation normale (1) est difficilement utilisable si $m \gg n$. On utilise plutôt une factorisation QR de B :

$$\underbrace{B}_{m\times n} = \underbrace{Q}_{m\times m}\underbrace{R}_{m\times n} = Q$$



Le problème aux moindres carrés se récrit alors :

$$\|Bx-c\|_m^2 = \|{}^tQ(Bx-c)\|_m^2$$

$$= \|Rx - {}^tQc\|_m^2$$

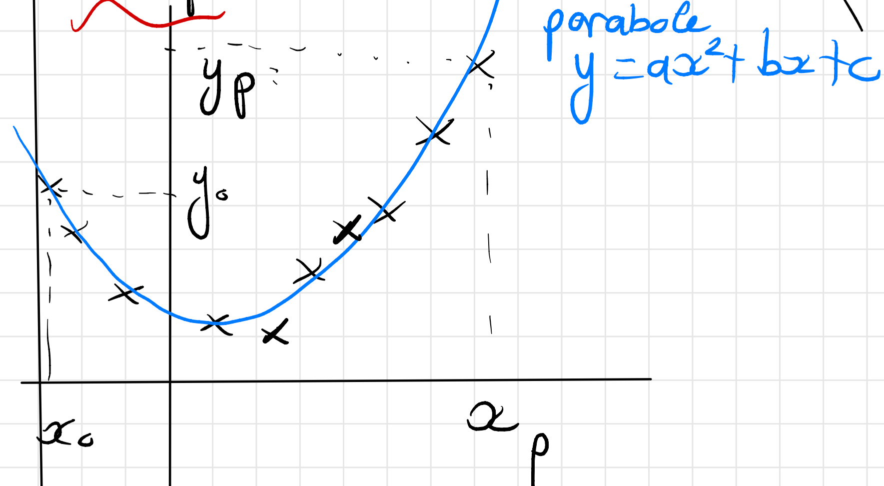
$$= \|R_1x - ({}^tQc)_n\|_n^2 + \mathrm{cste}$$

où $({}^tQc) = \begin{pmatrix} ({}^tQc)_n \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\updownarrow n$

u est solution du système $n \times n$:

$$R_1 u = ({}^tQc)_n$$

Exemples



Il s'agit d'un problème aux moindres carrés avec :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ \vdots & & \\ 1 & x_p & x_p^2 \end{pmatrix} \quad \text{et } c = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

$(m = p+1$ et $n = 3)$

2) Décomposition en valeurs singulières

On a le théorème-définition suivant :

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ de rang $r \leq \min(n,m)$.
Il existe $(U,V) \in O_n(\mathbb{R}) \times O_m(\mathbb{R})$ et une unique famille de réels $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_r$ tels que :

$$A = \underbrace{U}_{n \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}}_{m} {}^t\underbrace{V}_{m \times m}$$

On parle de la décomposition en valeurs singulières de A (ou svd).

preuve : il s'agit à nouveau d'un résultat de projection sur l'ensemble des matrices de rang r : en notant $\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$ $(k \leq r)$

on a

$$\|A - U \Sigma_k {}^t V\|_2 = \inf_{\substack{B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ rg(B) = k}} \|A - B\|$$

(admis : voir [Ciarlet])

On a en particulier :

$\sigma_1, \dots \sigma_r$: racines carrées des valeurs propres non nulles de ${}^tA\,A$ (ou $A\,{}^tA$).

V, U : vecteurs propres respectifs de $\underbrace{{}^tAA}_{m\times m}$ et $\underbrace{A\,{}^tA}_{n\times n}$.

Un algorithme efficace de calcul de la svd est basé sur la factorisation QR de A (voir Ciarlet).

Exemple : texte sur la recherche bibliographique.