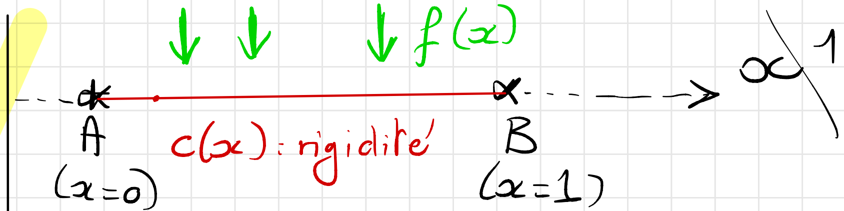
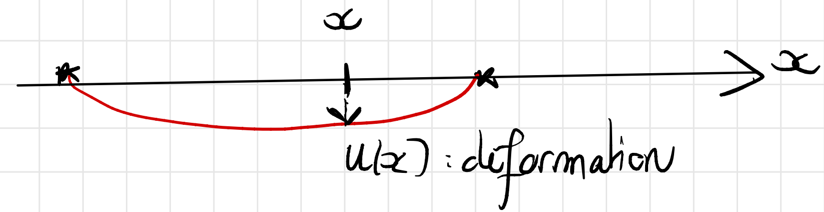
exemple de résolution d'un problème aux limites

1) Modélisation du problème
2) Étude mathématique
3) Résolution approchée du problème
4) Implémentation et retour à la modélisation

1) Modélisation

On s'intéresse au problème de la déformation d'une poutre (corde, ...) fixée à ses extrémités :



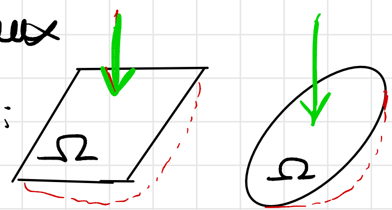


Après écriture des relations de la mécanique des solides, on aboutit à l'équation suivante sur u :

$$\boxed{\begin{cases} -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) & (x \in]0,1[) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}} \quad (1)$$

(équation de Poisson avec conditions de Dirichlet)

Remarque : dans le cas de la modélisation de la déformation d'une membrane, on aboutit à la résolution d'une EDP (équation aux dérivées partielles) :



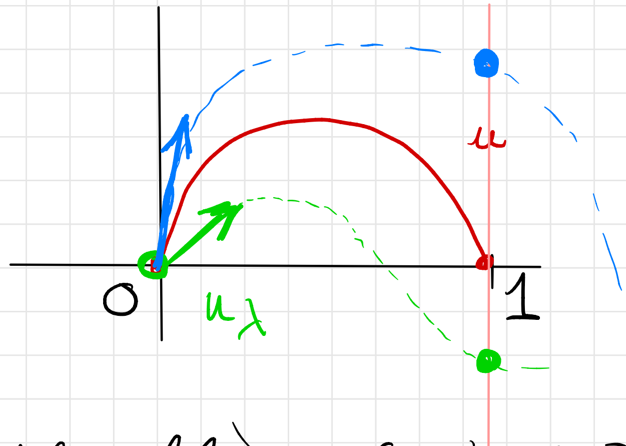
$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u(x) = f(x) & (x \in \Omega) \\ u_{/\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

2) Etude mathématique

On montre ici l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1). On suppose dans toute la suite que $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $c \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ avec

$\forall x \in [0,1],\ c(x) \geq 0.$

L'idée consiste à étudier un problème de Cauchy en 0, paramétré par $\lambda = u'(0)$ et de montrer l'existence et l'unicité d'un paramètre λ tq $u_\lambda(1) = 0$ (méthode de tir)



Soit le problème de Cauchy $(1)_\lambda$:

$$(1)_\lambda \quad \boxed{\begin{cases} -u_\lambda''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad (x \in]0,1[) \\ u_\lambda(0) = 0 \\ u_\lambda'(0) = \lambda \end{cases}}$$

$(\lambda \in \mathbb{R})$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le problème $(1)_\lambda$ admet une unique solution $u_\lambda \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ grâce au théorème de Cauchy Lipschitz linéaire :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \\ \text{et } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \end{cases}$$

On étudie à présent la fonction

$$\Phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & u_\lambda(1) \end{array} \right)$$

On doit montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(\lambda) = 0$

On montre que Φ_λ est affine en λ :
en effet, en notant w_1 l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -w_1''(x)+c(x)w_1(x)=0\\ w_1(0)=0\\ w_1'(0)=1\end{cases}$$

et w_2 l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} -w_2''(x)+c(x)w_2(x)=f(x)\\ w_1(0)=0\\ w_1'(0)=0\end{cases}$$

on a

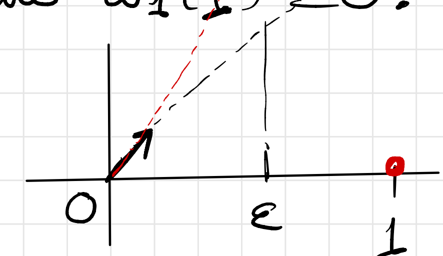
$u_\lambda = \lambda w_1 + w_2$ (par unicité de Cauchy Lipschitz).

Cela implique que

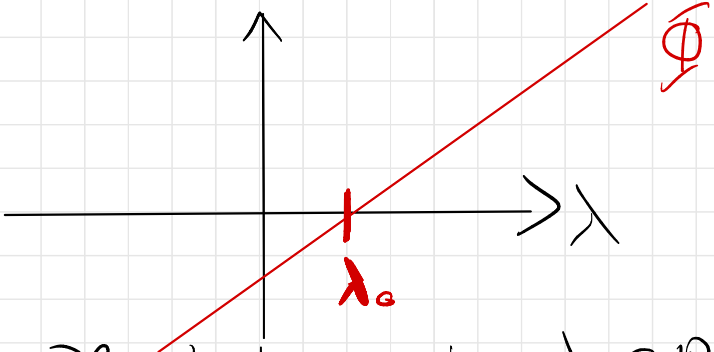
$$\Phi(\lambda)=\lambda\, w_1(1)+w_2(1)$$

Il reste donc à montrer que $w_1(1)\neq 0$

En effet, on suppose par l'absurde que $w_1(1)=0$. Comme



$w_1'' = \underbrace{c}_{\geq 0}\, w_1$ et $w_1>0$ sur $]0,\varepsilon[$, w_1 est convexe sur $]0,\varepsilon[$, $w_1'(x)\geq 1$ sur $]0,\varepsilon[$, on a donc $w_1(x)\geq x$ sur $]0,\varepsilon[$. On ne peut donc avoir $w_1(1)=0$



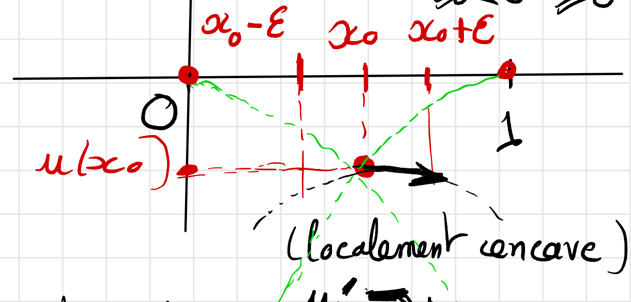
Il existe donc un unique $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tel que $\Phi(\lambda_0) = 0$ soit $u_{\lambda_0}(1) = 0$

Le problème (1) admet donc une unique solution. De plus, si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$ (principe du maximum).

En effet, on suppose par l'absurde qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tq $u(x_0) < 0$

//

$$u'' = \underbrace{c}_{\geq 0}\underbrace{u}_{<0} - \underbrace{f}_{\geq 0}$$



Localement, autour de x_0, on a u concave (et u' décroissante). En étendant cette propriété, on ne peut assurer simultanément que $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$

3) Résolution approchée du problème

Une première idée consiste à rechercher λ_0 tq $\Phi(\lambda_0) = 0$ (par dichotomie par exemple) puis à approcher le problème de Cauchy $(1)_{\lambda_0}$ avec une méthode à un pas (Euler, Runge-Kutta, ...)

→ Implémentation (Scilab)

Exemple avec $\begin{cases} c(x) = 1 \\ f(x) = (\pi^2 + 1)\sin(\pi x) \end{cases}$

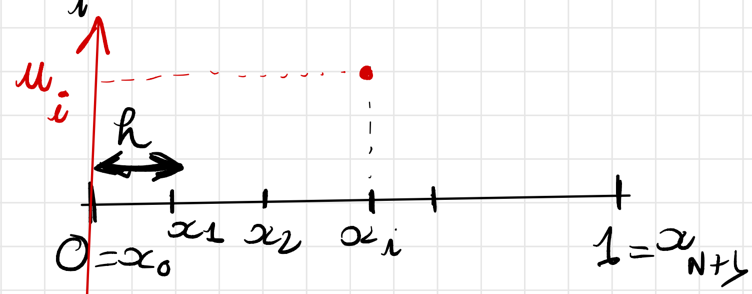
$\Rightarrow u(x) = \sin(\pi x)$ (solution exacte)

Cette approche est cependant peu précise, coûteuse, et non adaptée en dimension ≥ 1).

On présente ici une nouvelle méthode, appelée méthode des différences finies :

On discrétise tout d'abord le domaine de définition : on choisit $N+2$ points régulièrement distribués ($h = \frac{1}{N+1}$) :

$$x_i = 0 + ih \quad (0 \leq i \leq N+1)$$



On note u_i, une valeur approchée de $u(x_i)$.

On montre (avec Taylor) que

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

si $u \in C^4([0,1], \mathbb{R})$ (exercice)

Au vu de ce résultat, on propose le schéma de construction suivant par les valeurs $u_0, u_1, \ldots, u_{N+1}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = c_i u_i + f_i \quad (1 \leq i \leq N) \\ u_0 = 0 \text{ et } u_{N+1} = 0 \end{array}\right. \quad (2)$$

où $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$.

Il s'agit d'un système de N équations à N inconnues qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

où $U = {}^t(u_1, \ldots, u_N)$

On reconnaît la matrice du Laplacien discrétisé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont on sait qu'elle est définie positive.

Ainsi $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ est défini de manière unique

$$\left(\frac{1}{h^2} A + \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N \end{pmatrix} \gg 0 \right)$$

On peut également montrer un principe du maximum discret, à savoir :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \geqslant 0 \text{ (ie } u_i \geq 0 \ \forall i \text{)}$$

si $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \geqslant 0$.

(exercice : on montre que $\frac{1}{h^2} A + \begin{pmatrix} c_1 & \\ & \ddots \\ & & c_n \end{pmatrix}$ est une M-matrice).

Implémentation (Scilab)

(très bonne précision, même pour de petites valeurs de N).

On démontre à présent la convergence de $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ vers $\begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix}$ avec également une estimation d'erreur quand $N \to +\infty$.

La démonstration reprend les principes de consistance et de stabilité, utilisés par la convergence des méthodes à un pas :

→ la consistance est assurée avec l'approximation de Taylor de $u''(x_i)$

→ la stabilité se démontre en majorant une norme bien choisie de l'inverse de

$$M = \frac{1}{h^2} A + \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N \end{pmatrix}$$

On peut montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$|||M^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

(exercice : voir page du cours)

On utilise pour cela :

→ la formule donnant $|||M|||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |M_{ij}| \right)$

→ le principe du maximum discret par M

→ le vecteur $V = {}^t(v(x_1), \dots, v(x_N))$

où $v(x) = \frac{1}{2} x(1-x)$ est solution de

$$\begin{cases} -v'' = 1 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

En admettant ce résultat, on a :

$$\begin{cases} MU = F \text{ et} \\ \text{et } M \underbrace{\begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix}}_{U_{ex}} = F + \underbrace{O(h^2)}_{\Delta_h \text{ (erreur de consistance)}} \end{cases}$$

où u est la solution de (1).

On a donc en soustrayant et en inversant le système :

$$U - U_{ex} = M^{-1}(\Delta_h)$$

En prenant la norme, il vient :

$$\|U - U_{ex}\|_\infty \leq |||M^{-1}||| \; \underbrace{\|\Delta_h\|}_{\leq Ch^2}$$

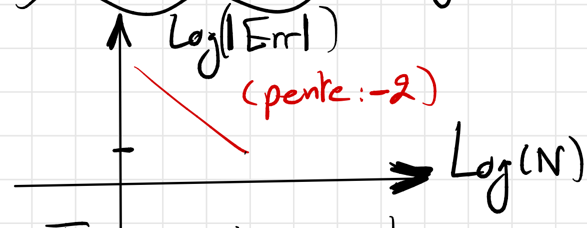
On a donc :

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |u(x_i) - u_i| \leq K h^2$$

La méthode est donc convergente et d'ordre 2.

4) Implémentation et retour à la modélisation

Implémentation & vérification de l'ordre.



* Test sur des exemples généraux
* Changement des conditions aux limites