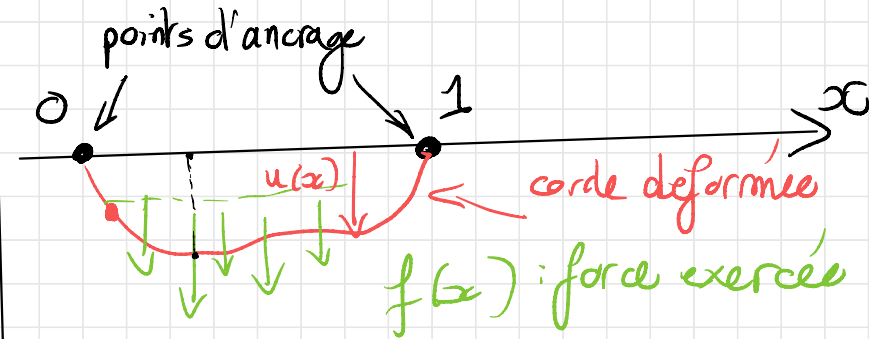


Modélisation de la déformation d'une corde.
Position optimale d'un poids sur cette corde

d'un poids sur cette corde afin de minimiser son risque de rupture

I) Modélisation de la corde



* Référence : texte public B2015 }
(voir aussi scana 15)

* Thèmes : * EDO (ou EDP)
* Optimisation

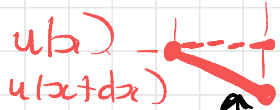
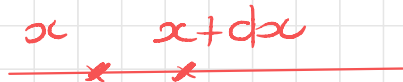
* Objectifs:

→ calculer la déformation d'une corde soumise à une force extérieure
→ déterminer la position optimale

Energie du système "corde"

→ énergie d'étirement
→ énergie due à la force exercée
(gravité négligée)

* Énergie d'éirement :



$$\sum_1^2 = k(x) \left(\sqrt{(u(x+dx) - u(x))^2 + (dx)^2} - dx \right)$$

(coefficient de raideur, variable ou constant)
en x

→ en intégrant

$$E_{\text{éirement}} = \int_0^1 k(x) du$$

$$= \int_0^1 k(x) \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right) dx$$

* Énergie due à la force exercée 2

$$E_{\text{force}} = - \int_0^1 \underbrace{f(x) u(x)}_{\text{travail en } x} dx$$

On cherche à minimiser

$$E(u) = E_{\text{éirement}} + E_{\text{force}}$$

$$\approx \frac{1}{2} \int_0^1 k(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Taylor ordre 2

$$- \int_0^1 f(x) u(x) dx$$

* On rajoute les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0$$

par exprimer la fixation de la corde à ses extrémités.

On admet (Th 1) qu'il existe

une unique fonction

$$u \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \text{ tq } u(0) = u(1) = 0$$

telle que

$$\forall v \in V, E(u) \leq E(v) \text{ où}$$

$$V = \{v \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}), v(0) = v(1) = 0\}$$

* Corollaire : la solution u vérifie $\frac{3}{3}$

$$(1) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) = f(x), x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(à démontrer)

Remarque : si k est constant, on a

$$\begin{cases} -k \Delta u = f, x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

* Modélisation du risque de rupture:



On admet que

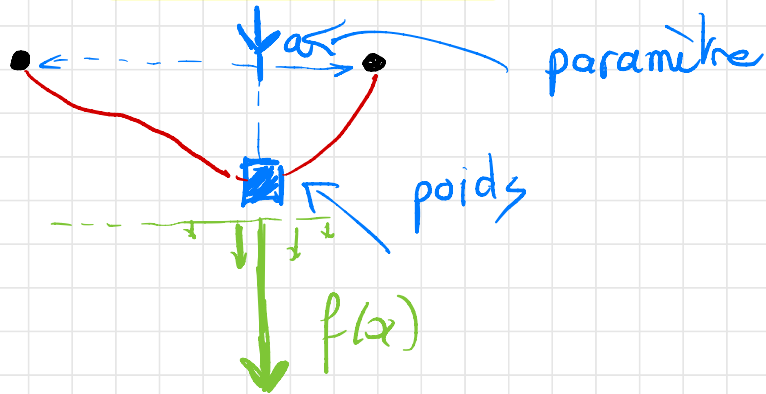
$$F(0) = k(0) \frac{\partial u(0)}{\partial x}$$

$$F(1) = k(1) \frac{\partial u(1)}{\partial x}$$

Le risque de rupture s'écrit:

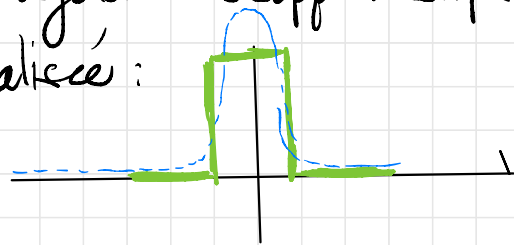
$$R(u) = \frac{1}{2} \left| k(0) \frac{\partial u(0)}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| k(1) \frac{\partial u(1)}{\partial x} \right|^2$$

II) Optimisation de la position d'une charge



$$f(x) = p(x-a) \text{ où}$$

p est une fonction à support compact, ou mieux localisée:



La question consiste à déterminer la meilleure valeur de α pour minimiser le risque de rupture.

α : paramètre $\in]0, 1[$



risque de rupture

$R(u^\alpha)$

solution de l'ED (1)

avec second

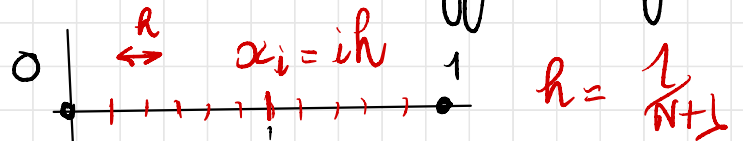
membre :

$f(x) = p(x - \alpha)$

III) Discrétisation du problème 5

3.1) Résolution numérique de la déformation de la corde

→ Méthode des différences finies



ou $(u_i)_{0 \leq i \leq N+1}$

$u_0 = u_{N+1} = 0$ et :

$$-\frac{1}{h} \left(k_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - k_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \right) = f_i$$

$$\text{où} \begin{cases} h_{i+\frac{1}{2}} = h \left((i+\frac{1}{2}) h \right) \\ h_{i-\frac{1}{2}} = h \left((i-\frac{1}{2}) h \right) \\ f_i = f(x_i) \end{cases}$$

On prend par exemple :

* $f(x) = p(x-a)$ avec
 a : fixe quelconque (par exemple $a=0,3$)

$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

où λ : grand (par exemple $\lambda=20$)

* $k(x) = 1 + 0,8 \sin(10x) \cos(5x)$

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ est solution du système

linéaire :

$MU = F$ où

$M = \begin{pmatrix} m_{11} & & & 0 \\ * & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & * \\ & & & m_{N,N} \end{pmatrix}$

$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$

→ implementation : Scilab, Python

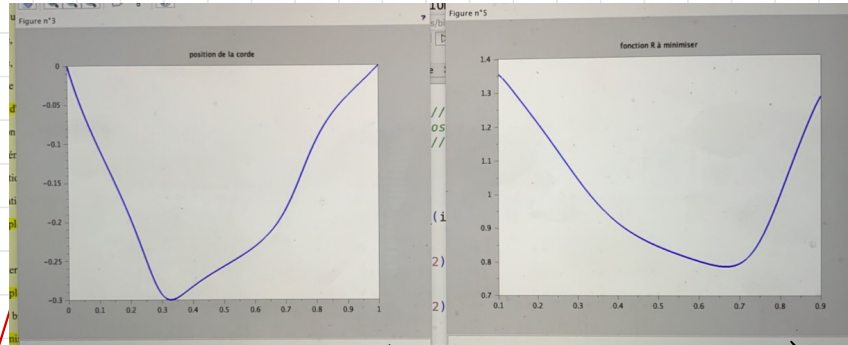
3.2) Calcul numérique du critère de rupture

On calcule numériquement le critère de rupture pour une valeur de a donnée :

$$R(u^a) \approx \frac{1}{2} k_{\frac{1}{2}} \frac{u_1^2}{h^2} + \frac{1}{2} k_{N+\frac{1}{2}} \frac{u_N^2}{h^2}$$

$$\begin{cases} k_{\frac{1}{2}} = k \left(\frac{1}{2} h \right) \\ k_{N+\frac{1}{2}} = k \left((N+\frac{1}{2}) h \right) \end{cases}$$

On peut représenter la fonction $[0.1, 0.9] \rightarrow \mathbb{R}$
 $a \rightarrow R_N(a)$
(balayage de points entre 0.1 et 0.9)



(corde si $a = 0,3$) ($a \mapsto R_N(a)$)

3.3) Recherche du minimum du critère de rupture

Par appliquer un algorithme de gradient, on doit d'abord calculer $a \mapsto R_N'(a)$.

On a :

$$\frac{\partial R_N(a)}{\partial a} = \sum_{j=1}^N h_j^2 \left(\frac{1}{h^2}\right) 2u_j^a \left(\frac{\partial u_j^a}{\partial a}\right) + \sum_{j=N+1}^N h_{N+1}^2 \left(\frac{1}{h^2}\right) 2u_N^a \left(\frac{\partial u_N^a}{\partial a}\right)$$

L'équation (1) étant linéaire en a

$\frac{\partial u^a}{\partial a}$ solution de

$$-\frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^a}{\partial a}\right)) = \frac{\partial f}{\partial a}$$

et avec la même discrétisation) 8

$\frac{\partial U}{\partial a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^a}{\partial a} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_N^a}{\partial a} \end{pmatrix}$ est solution de

$$M \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = \frac{\partial F^e}{\partial a} = - \begin{pmatrix} p'(x_1 - a) \\ \vdots \\ p'(x_N - a) \end{pmatrix}$$

L'algorithme de gradient s'écrit :

$$\begin{cases} a_0 = 0,5 \\ a_{k+1} = a_k - \frac{\partial R_N'(a_k)}{\partial a} \end{cases}$$

On s'arrête lorsque $|\frac{\partial R_N'(a)}{\partial a}| < 10^{-6}$ pas du gradient

3.4) Illustrations informelles:

→ sur l'exemple, $a \approx 0,566$ est la position optimale où placer le poids afin de réduire le risque de rupture

→ Cas tension $k = \text{cte}$:

* $a \mapsto R_N(a)$ est quadratique (à démontrer) et son minimum se trouve en $a = 0,5$

→ sensibilité de la méthode du gradient au point initial (a_0) et au pas de descente (ρ)

→ alternatives à la méthode de gradient: "dichotomie" (sans gradient) ou dichotomie sur $R_N'(a)$, ordre 2 (Newton) avec le calcul de $R_N''(a)$ (lourd à calculer).

Référence

* F. Hubert, J. Hubbard (2 tomes)