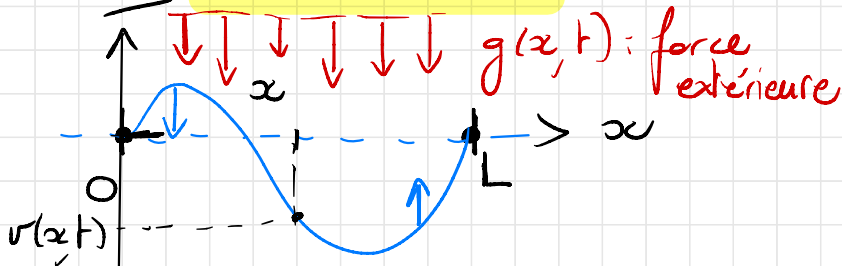


vibrations d'une corde

Sous titre : peut-on entendre la forme d'un tambour ?

I Modélisation



On admet (principe fondamental de la dynamique) que v vérifie l'EDP :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = g(x) \cos(\omega t) & (x \in]0, L[, t > 0) \\ * v(0,t) = v(L,t) = 0 & \text{(corde fixée)} \\ & \text{(Dirichlet)} \\ * v(x,0) = 0 & \text{(corde au repos)} \\ & \text{initialement} \\ * \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0 & \text{(corde lâchée)} \\ & \text{initialement} \end{cases} \quad (1)$$

avec $g \in L^2(]0, L[)$ et $\omega > 0$.

On admet qu'il existe une unique solution v au système (1).

II) Etude des modes propres de l'équation des ondes

Les résultats ci-dessus sont vus par $\Omega =]0, L[$ mais peuvent être étendus par un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On cherche à déterminer les valeurs propres et les modes propres de l'opérateur "-Laplacien" avec conditions aux limites de Dirichlet.

On détermine ensuite un lien avec les solutions de (1).

λ_k est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet sur Ω , associé à un mode propre $u_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, non nul, si on a:

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & \alpha \in]0, L[\\ u_k(0) = u_k(L) = 0 \end{cases}$$

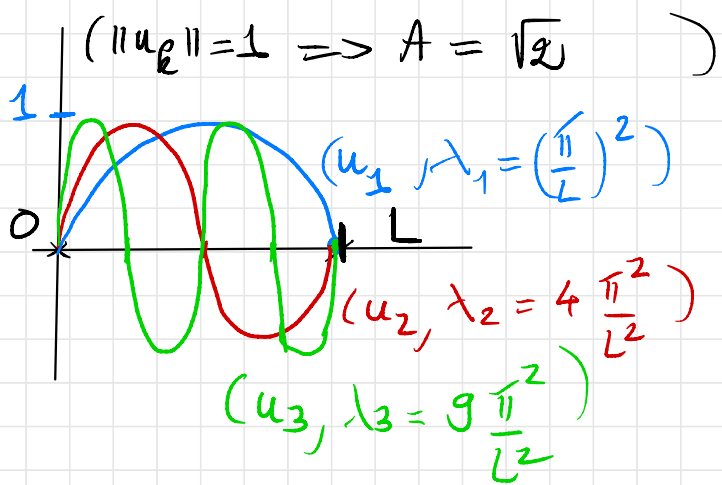
$$u_k|_{\partial\Omega} = 0$$



$$\left(\omega_k = \frac{k\pi}{2L} \right)$$

* Si $\Omega =]0, L[$,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \\ u_k(x) = A \sin\left(\frac{k\pi}{L} x \right) \end{array} \right\} (k \in \mathbb{N}^*)$$



On admet que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme une base hilbertienne de $L^2(0, L)$ (voir par Ω général).

* Lien avec les solutions de (1):

On décompose $g \in L^2$, dans

la base $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$: $\langle g, u_k \rangle$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k u_k(x)$$

On cherche la solution de (1) sous la forme:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) u_k(x)$$

On a donc la relation suivante par les fonctions y_k :

$$\sum_k y_k''(t) u_k(x) + \sum_k y_k(t) \lambda_k u_k(x)$$

$$= \cos(\omega t) \sum_k g_k u_k(x)$$

soit: $y_k''(t) + \lambda_k y_k(t) = \cos(\omega t) g_k$

qu'on résout avec les CI:

$$y_k(0) = y_k'(0) = 0$$

On obtient, après calculs, une expression explicite de y_k en fonction de k, ω, g_k, t .

Dans le cas où $\Omega =]0, L[$, on admet que l'approximation de v à partir de ses K premiers modes :

$$v_K(x, t) = \sum_{k=1}^K y_k(t) u_k(x)$$

donne une erreur majorée par :

$$\sup_{t \geq 0} \| v(x, t) - v_K(x, t) \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{K^{m+\alpha}}$$

(où m est tel que $\sum_k \lambda_k^m |g_k|^2 < +\infty$)

\Rightarrow 1^{ère} méthode d'approximation de v

III) Etude numérique de l'équation des ondes

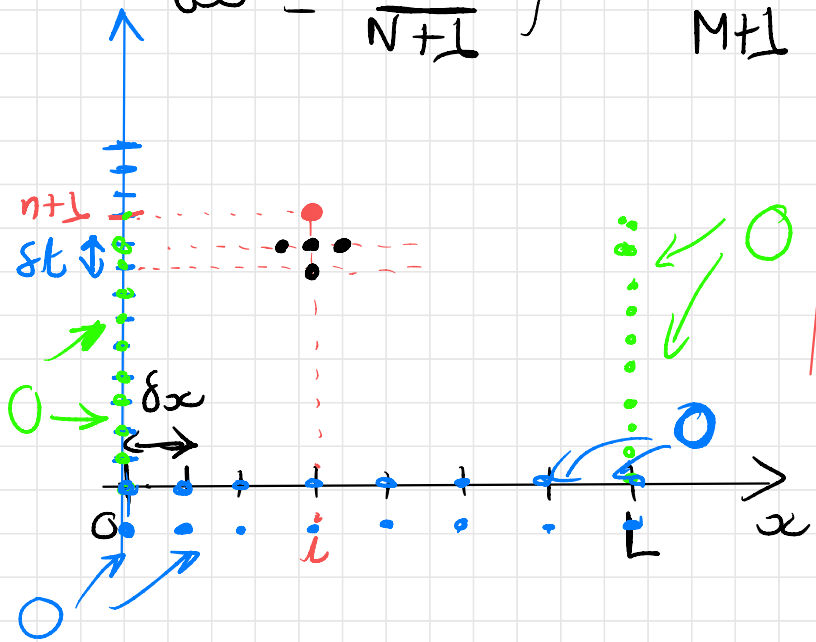
On propose d'utiliser un schéma de type différences finies, en temps et en espace : on note v_i^n une approxi-

- matrice de $v(x_i, t_n)$

avec $x_i = i \delta x$ ($1 \leq i \leq N$)

$t_n = n \delta t$ ($0 \leq n \leq M$)

où $\delta x = \frac{L}{N+1}$, $\delta t = \frac{T}{M+1}$



On propose le schéma : ($n \geq 1$) / 5

$$\left. \begin{aligned} & \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{(\delta t)^2} - \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{(\delta x)^2} = f_i^n \\ & v_0^n = v_{N+1}^n = 0 \text{ (Dirichlet)} \\ & v_i^0 = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1 \text{ (repos initial)} \\ & v_i^{i+1} = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1 \text{ (corde lâchée)} \end{aligned} \right\}$$

Illustration numérique sur l'exemple
du texte :

$$\begin{cases} * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a, b]^{(a)}, \text{ on a} \\ * \omega = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$
$$g_k = \langle g, u_k \rangle \quad (L=1)$$

$$= \int_a^b \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{k\pi} \left[-\cos(k\pi x) \right]_a^b$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{k\pi} (\cos(k\pi a) - \cos(k\pi b))$$

On résout :

$$y_k''(t) + (k\pi)^2 y_k(t) = g_k \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$$

On a :

$$y_k^{(r)} = y_h^{(r)} + y_p^{(r)}$$

$$= A \cos(k\pi t) + B \sin(k\pi t) + y_p^{(r)}$$

avec la solution particulière :

$$y_p^{(r)} = \frac{g_k \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)}{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + (k\pi)^2}$$

On trouve $B = 0$ et $A = -\frac{g_k}{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + (k\pi)^2}$

* Comparaison des 2 approches sur l'exemple du texte:

→ la méthode "spectrale" donne une très bonne approximation, dès que le nombre de modes ≥ 3 .

→ la méthode D.F. est moins précise sur l'exemple. Elle converge cependant aussi vers la solution exacte en $O((\delta t)^2 + (\delta x)^2)$.

Cependant, il faut respecter un critère de stabilité : $\frac{\delta t}{\delta x} \leq \frac{1}{2}$.

IV Formule de Weyl

On s'intéresse à la répartition des valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$:

$$dP(\lambda) = \text{card} \{ k \in \mathbb{Z}^d \mid \lambda_k \leq \lambda \}$$

Par exemple, si $\Omega =]0, 1[$ sachant que $\lambda_k = (k\pi)^2$

$$\text{on a } dP(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}$$

De manière générale, on montre que

$$dP(\lambda) \sim \frac{\text{mes}(\Omega) \text{mes}(B_d)}{(2\pi)^d} \lambda^{d/2}$$

On peut vérifier l'exactitude de
cet équivalent :

$$\rightarrow \text{so } \Omega =]0, 1[: E\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right) \sim \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}$$

$$\rightarrow \text{si } \Omega =]0, a[\times]0, b[\\ dP(\lambda) \sim \frac{ab}{(2\pi)^2} \lambda = \frac{ab}{4\pi}$$

(à vérifier numériquement)

(\Rightarrow "entendre la forme d'un tambour")

* La dernière question soulevée
par le texte, consiste à retrouver
la formule de Weyl, à partir
du Laplacien discrétisé :

$$A_h u_h = \lambda_h u_h$$

où $A_h = \begin{pmatrix} 2/h^2 & -1/h^2 & & 0 \\ -1/h^2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$

Si on utilise la méthode de la puissance
pour trouver une approximation de la
plus grande des valeurs propres de A_h ,
notée λ_h^* , on peut penser

$$dP(\lambda_h^*) \approx N.$$