Algèbre linéaire : rappels et compléments (hors aspects numériques)

1) Espaces vectoriels

Def Soit K un corps. E est un K espace vectoriel si

(i) $(E, +)$ est un groupe abélien

(ii) la loi de composition externe de $K \times E$ dans E vérifie :

$$\begin{cases} * \ \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \\ * \ (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \\ * \ (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \\ * \ 1.x = x \end{cases}$$

Exemples : $\mathbb{K}^n$, $K[X]$, $K^{\mathbb{N}}$, ...

$\rightsquigarrow$ notion de sous-espace vectoriel

Pour montrer que $F \subset E$.ev est un sous espace vectoriel, il suffit de montrer que

$\forall (x, y, \lambda) \in F \times F \times \mathbb{K}$, $x+y \in F$ et $\lambda x \in F$

ainsi que $F \neq \emptyset$ $(0 \in F)$.

Exemple : $K_n[X] \subset K[X]$

(*) par l'absurde

Exercices : * E_1, E_2 sev de E. Si $E_1 \cup E_2$ est un sev de E, alors $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$

* Si K est infini, $E_1, \dots E_n$

sev de E, distincts, alors (*) voir démo en fin de chapitre

$E_1 \cup E_2 \dots \cup E_n \neq E$

(faux si on enlève l'hypothèse K infini ou par un nombre dénombrable de sev)

→ sommes d'espaces vectoriels :

Déf $(E_i)_{i \in I}$ famille de sev de E

On note $\sum_i E_i = \left\{ \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} x_i, x_i \in E_i \right\}$

On dit que la somme est directe si

$$\sum_{\text{finie}} x_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i$$

On note alors $\bigoplus_i E_i$ le sev en question

Exercices

* $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\}$
* $E_1 + E_2 + E_3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$

$\Updownarrow$ $E_1 \cap (E_2 + E_3) = \{0\}$ et $E_2 \cap (E_1 + E_3) = \{0\}$

Exemples :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_{\text{paire}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{F}_{\text{impaire}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2) Applications linéaires

Déf : soit E, F deux K ev. $f : E \to F$ est un morphisme d'ev (ou application linéaire) ssi :

$$\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times K, \ f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\text{et } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

On parle d'isomorphisme si f est de plus bijectif.

Exercice : la réciproque d'un isomorphisme d'ev. est également linéaire.

Def : noyau, image d'une application linéaire.

Exemple par le cas des espaces quotient :

Def : soit F un sev de E, K ev. On note $E/_F$ l'espace quotient, formé des parties de E du type $x+F$ (avec $x \in E$).

On montre que $E/_F$ est un K ev.

(en particulier $0_{E/F} = x+F \; (x \in F)$
$= F$)

On définit l'application projection :

$\pi : \begin{pmatrix} E \to E/F \\ x \mapsto x+F \end{pmatrix}$. On montre que π est une application linéaire, surjective.

Proposition Soit $f : E \to E'$ une application linéaire et F sev de E.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \\ E/F \arrow[ru, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Il existe $\tilde{f} : E/_F \to E'$ tel que $\tilde{f} \circ \pi = f$ ssi $F \subset \ker f$.

Théorème du rang : l'application $\tilde{f} : E/_{\ker f} \to \mathrm{Im} f$ tq $\tilde{f} \circ \pi = f$ est un isomorphisme d'ev.

3) Bases et dimension

Def : soit Y une partie de E Kev.

* Y est libre ssi :

$$\sum_{i \text{ finie}} \lambda_i \underbrace{y_i}_{\in Y} = 0 \Rightarrow y_i = 0 \ \forall i \in I$$

* Y est génératrice ssi :

$$\forall x \in E, \ x = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} \lambda_i \underbrace{y_i}_{Y}$$

* Y est une base si elle est libre et génératrice.

Exemples : * $e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, 0 \dots 0)$

$\{e_i, i \in \{1, \dots n\}\}$ base de $\mathbb{K}^n$

* $\left\{X^k, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{(X-z)^k}, k \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}\right\}$ base de $\mathbb{C}(X)$ (fractions rationnelles)

Lemme : toute partie libre maximale est une base.

Théorème : si $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{libre}}}{X} \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{génératrice}}}{Y} \subset E$, alors

il existe Y' base telle que $X \subset Y' \subset Y$

(corollaire : théorème de la base incomplète)

Def : E Kev est de dimension finie si il possède une base de cardinal fini

Théorème : un espace vectoriel possède toujours une base. De plus, deux bases de cet espace vectoriel possèdent le même cardinal (il existe une bijection entre ces 2 familles).

Def : la dimension d'un espace vectoriel est le cardinal d'une de ses bases.

Exercices

* $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
* $\dim K_n[X] = n+1$
* $\dim \underbrace{K^{(I)}}_{\text{familles indexées par } I \text{ presque nulles}} = \operatorname{card}(I)$

(en particulier $K^{(\mathbb{N})}$ est de dimension dénombrable)

* Tout espace de dimension finie (resp. dénombrable) est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ (resp. $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$).
* $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{Q}$ ev de dimension dénombrable
* Toute famille non dénombrable dans un e.v. de dimension dénombrable est liée.
* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites reelles) est de dimension non dénombrable.

Proposition : si E Kev de dimension finie

* $\dim E/_F = \dim E - \dim F$

* $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$
* $\dim(\underbrace{E \times F}_{\text{produit}}) = \dim E + \dim F$

Corollaire (Théorème du rang)

$f : E \to F$ linéaire avec E Kev de dimension finie. Alors :

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

En particulier, si F est de même dimension que E, alors

f bijective $\Longleftrightarrow$ f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective.

Proposition (formule de Grassmann)

* E_1, E_2 sev de E (de dimension finie). On a :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

* E_1, E_2, E_3 sev de E :

$$\dim(E_1 + E_2 + E_3) = \dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 - \dim(E_1 \cap E_2) - \dim(E_1 \cap E_3) - \dim(E_2 \cap E_3) + \dim(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

preuve : soit $f : \left\{ \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \to E_1 + E_2 \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{array} \right.$

* f est linéaire, surjective
* $\operatorname{Ker} f = (E_1 \cap E_2)$

$\rightsquigarrow$ Théorème du rang permet de conclure.

Démo de l'exercice page 1 :

→ par l'absurde $E_1 \not\subset E_2$ et $E_2 \not\subset E_1$

Soit $x \in E_2 \setminus E_1$ et $y \in E_1 \setminus E_2$. Alors

$x+y \in E_1 \cup E_2$ (car $E_1 \cup E_2$ sev).

Or $x+y \notin E_1$ (sinon $x \in E_1$)

et $x+y \notin E_2$ (sinon $y \in E_2$)

→ par l'absurde :

$\underset{\text{sev}}{E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_n} = E$ ($\mathbb{K}$ infini)

• on exclut d'abord les cas particuliers ($E_1 \subset \bigcup_{i=2}^{n} E_i$) et on suppose n minimal

soit $x_0 \in E \setminus E_1$ et $y_0 \in E_1 \setminus \bigcup_{i=2}^{n} E_i$

soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$\varphi(\lambda) = \min \{ i \in \{1, \ldots, n\},\ x_0 + \lambda y_0 \in E_i \}$

$\varphi(\lambda) \geqslant 2$ (car sinon $x_0 \in E_1$)

* φ est injective : si $\begin{cases} \varphi(\lambda) = \varphi(\mu) \\ \lambda \neq \mu \end{cases}$

alors $\begin{cases} x_0 + \lambda y_0 \in E_i \\ x_0 + \mu y_0 \in E_i \end{cases} \Rightarrow y_0 \in E_i$. ($i \geqslant 2$) absurde.

$\varphi : \mathbb{K} \to \{2, \ldots, n\}$ est injective, ce qui est absurde.

4) Matrices

* Déf : ensemble $\mathcal{M}_{p,q}(K)$:

$$A = p \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{array} \right)$$

q

→ somme de deux matrices de même taille. $A+B = [a_{i,j} + b_{i,j}]_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

→ loi de composition externe

$$\lambda . A = [\lambda a_{ij}]$$

$(\mathcal{M}_{p,q}(K), +, .)$ est un espace vectoriel de dimension $p \times q$.

→ produit de 2 matrices :

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_{p,q}(K) \\ B \in \mathcal{M}_{q,\ell}(K) \end{array}\right) \to AB \in \mathcal{M}_{p,\ell}(K)$$

tel que $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$

Propriétés $(\mathcal{M}_n(K), +, ., *)$ algèbre.

(en particulier $A.(BC) = (A.B)C$)

Def : matrice inversible, ensemble $GL_n(K)$.

* Def : soit E et E' deux espaces vectoriels de dimension respective q et p

Soit e une base E
e' une base de E' } ; la matrice

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_q) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_p \end{array}$$

s'appelle la matrice representative de f dans les bases e et e' (notée $Mat(f)_{e,e'}$)

Corollaire : $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $\mathcal{L}(E,E')$ sont isomorphes.

Cas particulier : matrices de passage

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases d'un même espace vectoriel de dimension n.

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathcal{E}'_1 & \cdots & \mathcal{E}'_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{E}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_n \end{array}$$

s'appelle la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$.

Il s'agit aussi de $Mat(Id)_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$

Propriétés des matrices de passage :

* $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \cdot P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}''} = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}''}$
* si $x = \sum x_i \mathcal{E}_i$ et $x = \sum x'_i \mathcal{E}'_i$

alors $\underbrace{x}_{K^n} = \underbrace{P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}}_{\mathcal{M}_n(K)} \underbrace{x'}_{K^n}$

* Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$\mathrm{Mat}(f)_{\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'})\,\mathrm{Mat}(f)_{\mathcal{E}'}\,(P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'})^{-1}$$

* Def : soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. On appelle rang des lignes de A, noté $r_L(A)$, la dimension dans $\mathcal{M}_{1,q}(K)$ (vecteurs lignes) de l'espace engendré par les lignes de A. (idem pour $r_C(A)$ le rang des colonnes de A).

Théorème on a

$$r_L(A) = \mathrm{Min}\{r \in \mathbb{N}^* ;\ \exists B \in \mathcal{M}_{p,r}(K) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{r,q}(K) \text{ avec } A = BC\} = r_C(A)$$

On note $rg(A)$ cette valeur (rang des lignes ou des colonnes).

Corollaire

* $rg({}^tA) = rg(A)$
* $rg(A.B) \leq \mathrm{Min}(rg(A), rg(B))$
* si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $rg(A) = p$, alors A est inversible à droite (idem $rg(p) = q$ et A inversible à gauche)
* si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, A est inversible ssi $rg(A) = n$ (ou ssi elle elle est inversible à droite ou à gauche)

Proposition (réduction par le rang)

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et de rang r. Il existe $B \in \mathcal{M}_{p,r}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{r,q}(K)$ tel que $A = BC$. De plus, il existe $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_q(K)$ tel que

$$A = P \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) Q$$

(où $I_r = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ matrice identité)

Exercice : soit p projecteur de E.

$$rg(Mat(p)_\varepsilon) = Tr(Mat(p)_\varepsilon)$$

(où $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$) $(= Tr(p))$

Autre caractérisation du rang :

Def : $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K) \Rightarrow$ matrice extraite $A_{I,J}$ où $\begin{cases} I \subset [\![1,p]\!] \\ J \subset [\![1,q]\!] \end{cases}$

Proposition : soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, le rang de A est le plus grand entier r pour lequel il existe une matrice carrée extraite de A de taille r et inversible.

5) Déterminant

Dans cette partie, toutes les matrices sont carrées.

On définit le déterminant à l'aide

des permutations de $\{1, \dots, n\}$:

$\sigma : \left(\begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ i & \longmapsto & \sigma(i) \end{array}\right)$ avec σ bijective.

(ensemble noté $\mathfrak{S}_n$, de cardinal $n!$)

Sur cet exemple, on définit la notion de signature : nombre de permutations dans σ (nombre de couples (i,j) tq $i<j$ et $\sigma(i)>\sigma(j)$)

Def : soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle déterminant de A, l'élément de K :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots \dots a_{n,\sigma(n)}$$

(noté aussi $|A|$)

Cas particulier :

$\rightarrow n=2$: $\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc$

$\rightarrow n=3$: $\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right| = abc + bfg + cdh - gec - dbi - ahf$

$\rightarrow \det(I_n) = 1$

$\rightarrow$ matrices triangulaires :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition (dvpt ligne/colonne)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On a

$$\det(A) = a_{1,1}\det(A^{1,1}) - a_{1,2}\det(A^{1,2}) + \dots + (-1)^n a_{1,n}\det(A^{1,n})$$

où $A^{1,i} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,i} \ \cdots \ a_{1,n}} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

(matrice extraite de A privée de la ligne 1 et de la colonne i)

(ici exemple d'un développement par rapport à la première ligne, possible aussi par toute ligne ou colonne)

Proposition : $\det({}^tA) = \det(A)$

Une propriété essentielle du déterminant est le déterminant du produit :

Théorème : $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$

$$\det(AB) = \det(A).\det(B)$$

Corollaire : A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$

Ce théorème peut se démontrer avec

un lemme sur l'application déterminant :

$$\det : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \to & K \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array} \right)$$

Lemme : soit $D : \mathcal{M}_n(K) \to K$

telle que :

* D est linéaire en chaque colonne de A :

$D(C_1, \dots, C_k + \lambda D_k, C_{k+1}, \dots C_n)$

$= D(C_1, \dots, C_k, C_{k+1}, \dots C_n)$

$+ \lambda D(C_1, \dots, D_k, C_{k+1}, \dots C_n)$

* $D(A) = 0$ si une des colonnes de A est nulle.

alors $D = D(I_n) \cdot \det$

(pour démontrer le théorème à partir du lemme, il suffit de considérer l'application

$$D : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \to & K \\ A & \mapsto & \det(AB) \end{array} \right)$$
)

Exercices : calcul de déterminants usuels (Vandermonde, ...)

Prochain cours : en présentiel, Mercredi 05/10, à 9h

↓

Vendredi 07/10, à 17h

⤳ Cramer, Gauss, + résolution numérique