Préambule

Dans tout le texte $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes, m colonnes et à coefficients réels ; on notera I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. Si $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$, on notera ${}^tA = [a_{j,i}]_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ la matrice transposée de A. On identifiera les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ avec les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On utilisera la notation $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ pour désigner la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les λ_i. Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *diagonale de signes* si elle est de la forme

$$S = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n), \quad \text{où} \quad \forall i = 1, \cdots, n : \ \epsilon_i \in \{-1, +1\}.$$

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est muni du produit scalaire,

$$(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mapsto \langle x|y\rangle = {}^txy \in \mathbf{R},$$

et on note $||x|| = \langle x|x\rangle$ la norme d'un vecteur x de $\mathbf{R}^n$. On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *orthogonale* si ${}^tAA = I_n$ ou de manière équivalente si pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, on a $\langle Ax|Ay\rangle = \langle x|y\rangle$.

Une matrice $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ est dite *positive* et on note $A \geqslant 0$ si tous ses coefficients $a_{i,j}$ sont positifs :

$$[a_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } \forall 1 \leqslant j \leqslant m : \quad a_{i,j} \geqslant 0.$$

On dira aussi qu'elle est *strictement positif* et on note $A > 0$, si tous ses coefficients le sont.

Dans le texte on utilise les notations usuelles sur les matrices par blocs et les candidats sont invités à utiliser sans justification les calculs par blocs comme par exemple

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BY \\ CX + DY \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $X \in \mathbf{R}^m$, $Y \in \mathbf{R}^n$.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème de Broyden suivant et ses liens avec le lemme de Farkas et le théorème de Tucker.

Théorème de Broyden : *Soit O une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Il existe alors $x > 0$ dans $\mathbf{R}^n$ et une unique matrice diagonale de signes $S = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$, tels que*

$$Ox = Sx.$$

A- Préliminaires

1) Dans cette question, on suppose $n = 2$. Démontrer alors le théorème de Broyden, dans le cas où

   1-a) O est la matrice d'une réflexion.

1-b) O est la matrice d'une rotation.

2) Soient x, y des vecteurs *strictement positifs* de $\mathbf{R}^n$ et soient S, R deux matrices diagonales de signes.

2-a) Montrer que
$$\langle Sx|Ry\rangle \leqslant \langle x|y\rangle,$$
avec égalité si et seulement si $R = S$.

2-b) Démontrer l'unicité de S dans le théorème de Broyden.

2-c) Montrer que
$$||Sx + Ry|| \leqslant ||x + y||,$$
avec égalité si et seulement si $R = S$.

3) Soient y, z_1, z_2 des vecteurs *positifs* de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $||y+z_1+z_2|| = ||z_1-z_2||$ si et seulement si $y = 0$ et $||z_1 + z_2|| = ||z_1 - z_2||$.

B- Le lemme de Farkas

Lemme de Farkas : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$. Alors exactement une des deux propositions suivantes est vérifiée :*

(I) il existe $z \in \mathbf{R}^m$ *positif* tel que $Az = b$;

(II) il existe $z \in \mathbf{R}^n$ tel que $-{}^tAz \geqslant 0$ et $\langle b|z\rangle > 0$.

Dans cette section, nous allons prouver le théorème de Broyden en utilisant le lemme de Farkas.

4) Avec les notations de l'énoncé du théorème de Broyden, montrer que l'égalité $Ox = Sx$ avec $x > 0$ est équivalente à
$$(*) \quad \begin{cases} (I_n + O)x \geqslant 0, \\ (I_n - O)x \geqslant 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

5) En utilisant le théorème de Farkas, montrer que si $(*)$ n'a pas de solution alors le système
$$(**) \quad \begin{cases} y + (I_n + {}^tO)z_1 + (I_n - {}^tO)z_2 = 0 \\ y, z_1, z_2 \geqslant 0 \\ y \neq 0, \end{cases}$$
doit avoir une solution.

6) En écrivant la première équation de (**) sous la forme $y+z_1+z_2 = {}^tO(z_2-z_1)$, et en utilisant la question 3), montrer que (**) n'a pas de solution et conclure.

C- Le théorème de Tucker

Théorème de Tucker : *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique (c'est à dire ${}^tA = -A$). Il existe alors un vecteur $u \in \mathbf{R}^n$ tel que*
$$u \geqslant 0, \qquad Mu \geqslant 0, \qquad u + Mu > 0.$$

Dans cette section, nous allons prouver le théorème de Broyden en utilisant le théorème de Tucker.

7) Avec les notations du théorème de Broyden, on note $M \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbf{R})$ la matrice par blocs suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n + O \\ 0 & 0 & I_n - O \\ -(I_n + {}^tO) & -(I - {}^tO) & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le théorème de Tucker, montrer qu'il existe des vecteurs *positifs* $x, z_1, z_2 \in \mathbf{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} (I_n + O)x \geqslant 0, \\ (I_n - O)x \geqslant 0, \\ -(I_n + {}^tO)z_1 - (I_n - {}^tO)z_2 \geqslant 0, \\ z_1 + (I_n + O)x > 0, \\ z_2 + (I_n - O)x > 0, \\ x - (I_n + {}^tO)z_1 - (I_n - {}^tO)z_2 > 0. \end{cases}$$

8) Montrer que $||z_1 + z_2|| = ||z_1 - z_2||$ et $-(I_n + {}^tO)z_1 - (I_n - {}^tO)z_2 = 0$.

9) En déduire alors que $x > 0$ et $x + Ox \geqslant 0$ ainsi que $x - Ox \geqslant 0$. Conclure.

D- Preuve du théorème de Broyden

Nous allons prouver le théorème de Broyden par récurrence sur la dimension. Le cas de la dimension 1 étant triviale, nous supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ et on écrit O sous la forme d'une matrice par blocs

$$O = \begin{pmatrix} P & r \\ {}^tq & \alpha \end{pmatrix},$$

où $P \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$ et donc $r, q \in \mathbf{R}^{n-1}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

10) Montrer que $|\alpha| \leqslant 1$ avec égalité si et seulement si $q = r = 0$. Traiter alors le cas $|\alpha| = 1$.

On suppose à présent que $|\alpha| < 1$ et on note $Q_\pm$ les matrices

$$Q_- = P - \frac{r\,{}^tq}{\alpha - 1}, \qquad Q_+ = P - \frac{r\,{}^tq}{\alpha + 1}.$$

11) Montrer que ${}^tPP + q\,{}^tq = I_{n-1}$, ${}^tPr + \alpha q = 0$ et ${}^trr + \alpha^2 = 1$.

12) Montrer que les matrices $Q_\pm$ sont orthogonales et que

$${}^tQ_+Q_- = I_{n-1} - \frac{2}{1-\alpha^2}q\,{}^tq.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour $Q_\pm$, on note $x_\pm > 0$ un vecteur de $\mathbf{R}^{n-1}$ et $S_\pm$ la matrice diagonale de signes, tels que

$$Q_\pm x_\pm = S_\pm x_\pm.$$

13) Montrer que

$$\langle S_+x_+|S_-x_-\rangle = \langle x_+|x_-\rangle - \frac{2}{1-\alpha^2}\langle x_+|q\rangle\langle x_-|q\rangle.$$

14) On pose $\eta_\pm = -\frac{\langle x_\pm|q\rangle}{\alpha\pm1}$, $z_\pm = \begin{pmatrix} x_\pm \\ \eta_\pm \end{pmatrix}$ et $S^\pm = \begin{pmatrix} S_\pm & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}$. Montrer, en utilisant la question 2-a), que dans le cas où $S_+ \neq S_-$ alors un des couples (z_+, S^+) et (z_-, S^-) vérifie le théorème de Broyden.

15) On suppose à présent $S_+ = S_-$ et on suppose $\langle x_+|q\rangle = 0$. On note $z = \begin{pmatrix} x_+ \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R_\pm = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}$.

15-a) Montrer que $Oz = R_\pm z$.

15-b) On écrit à présent

$$O = \begin{pmatrix} \alpha' & {}^tq' \\ r' & P' \end{pmatrix},$$

où $P' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$. Construire alors $z' = \begin{pmatrix} \eta' \\ x' \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ avec $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ strictement positif et $\eta' \geqslant 0$ tel qu'il existe une matrice diagonale de signes R' vérifiant $Oz' = R'z'$.

15-c) Dans le cas où $\eta' = 0$, et en utilisant la question 2-c), montrer qu'il existe une matrice diagonale de signes S telle que $O(z+z') = S(z+z')$ et conclure.

E- Preuve des théorèmes de Farkas et Tucker

16) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est antisymétrique alors $O := (I_n+M)^{-1}(I_n-M)$ est une matrice orthogonale.

17) Déduire du théorème de Broyden qu'il existe un vecteur strictement positif x ainsi qu'une matrice diagonale de signes S tels que $Ox = Sx$ et en déduire que $u = x + Sx$ est le vecteur positif du théorème de Tucker.

18) Pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$ comme dans le lemme de Farkas, on pose

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A & -b \\ 0 & 0 & -A & b \\ -{}^tA & {}^tA & 0 & 0 \\ {}^tb & -{}^tb & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit, d'après le théorème de Tucker, $y = {}^t(z_1, z_2, x, t) \geqslant 0$ tel que $By \geqslant 0$ et $y + By > 0$.

18-a) Montrer que si $t = 0$ alors pour $z = z_1 - z_2$, on a $-{}^tAz \geqslant 0$ et $\langle b|z\rangle > 0$.

18-b) Si $t > 0$ montrer que $Ax = tb$ et conclure.