Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2023/2024
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD/TP $n^o 1$: algèbre linéaire

Exercice 1.

On dit que la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $b_{i,j}$ est une M-matrice si elle vérifie les conditions suivantes:

- $\forall i \in \{1, .., n\}, \quad b_{i,i} > 0$
- $\forall (i, j) \in \{1, .., n\} \times \{1, .., n\}, \quad b_{i,j} \leq 0$ si $i \neq j$.
- $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} > 0$

1. Montrer que B est inversible
2. soit $F \in \mathbb{R}^n$ ayant toutes ses composantes positives ou nulles. Montrer qu'il en est de même pour le vecteur $V = B^{-1}F$.
3. En déduire que l'inverse d'une M-matrice a tous ses coefficients positifs ou nuls.
4. Montrer que ce résultat est conservé si on remplace la dernière condition par
   - B inversible et $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \geq 0$

Exercice 2.

1. Soit $\alpha_i, i = 1 \dots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant les égalités:
$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

2. Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathbb{R}_3[X], i = 1 \dots 4$ vérifiant les relations (1), avec respectivement:
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1).$$

3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question 1. avec:
$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1).$$
Montrer que pour chaque point $x \in]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in]0,1[$ tel que:
$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2.$$

4. On approxime l'intégrale d'une fonction f à l'aide de la formule de quadrature
$$\int_0^1 f(x)dx \sim \int_0^1 p_f(x)dx.$$
Calculer explicitement $\displaystyle\int_0^1 p_f(x)dx$ en fonction de f et montrer que cette formule est exacte pour toutes les fonctions polynômiales de $\mathbb{R}_3[X]$.

5. Majorer l'erreur commise en remplaçant $\int_0^1 f(x)dx$ par $\int_0^1 p_f(x)dx$ dans le cas où $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$.