

Université Mohammed 6 Polytechnique  
Education Fellow UM6P - Année 2023/2024  
Modélisation et Méthodes Numériques  
<http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html>

*TD n°3 : méthodes directes de résolution de systèmes linéaires: factorisation*

**Exercice 1.**

Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$  admet une décomposition  $LU$  que l'on déterminera.

**Exercice 2.** Soit  $A$  une matrice carrée  $n \times n$  dont toutes les sous-matrices diagonales sont inversibles.

1. Montrer qu'il existe
  - une matrice triangulaire inférieure  $L$  à diagonale unité (*i.e.*  $L_{i,i} = 1$ ),
  - une matrice triangulaire supérieure  $S$  à diagonale unité,
  - une matrice diagonale  $D$

telles que

$$A = LDS. \tag{1}$$

2. Montrer que cette décomposition est unique.
3. Montrer que si  $A$  est symétrique, la décomposition (1) devient :

$$A = LDL^T.$$

4. Retrouver la décomposition de Cholesky dans le cas où la matrice  $A$  est symétrique définie positive.

5. Montrer que si la matrice  $A$  est symétrique mais pas définie positive, on peut factoriser  $A$  sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T,$$

où  $B$  est une matrice triangulaire inférieure et  $\tilde{B}$  une matrice dont chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de  $B$ , soit égale à cette colonne changée de signe.

6. Appliquer cette factorisation à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.**

Le but de l'exercice est de montrer que si  $A$  a une structure bande c'est-à-dire si il existe  $p \in \{0, \dots, n-1\}$  tel que  $A_{i,j} = 0$  pour tout  $i, j$  tel que  $|i-j| > p$  alors il en est de même pour  $L$  et  $U$ .

Remarque:  $A$  est nulle en dehors des  $2p+1$  diagonales centrales et  $A$  a la forme suivante:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,p+1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p+1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-p,n} & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-p,n} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

On fixe l'indice  $k$  tel que  $k \geq p+2$ , alors  $A$  vérifie  $A_{kj}$  et  $A_{jk}$  sont nuls pour  $j$  compris entre 1 et  $k-(p+1)$ .

1. Montrer par récurrence sur  $j$  que sur la  $k^{\text{ième}}$  ligne de  $L$ , on a :  $L_{kj} = 0$  pour  $1 \leq j \leq k-(p+1)$ .

2. Montrer par récurrence sur  $j$  que sur la  $k^{\text{ième}}$  colonne de  $U$ , on a  $U_{jk} = 0$  pour  $1 \leq j \leq k - (p + 1)$ .

**Exercice 4.** Montrer que la matrice  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$  admet une décomposition de Cholesky que l'on déterminera.

**Exercice 5.**

Soit  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . On note  $H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice (dite de Householder)

$$H(v) = I_n - \frac{2}{\|v\|^2} v v^t$$

et  $\mathcal{H}$  l'ensemble de telles matrices complété par la matrice  $I_n$ .

1. Montrer que  $H(v) \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$  (matrices orthogonales et symétriques).
2. Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$  tel que  $\|x\| = \|y\|$ . Montrer qu'il existe  $H \in \mathcal{H}$  tel que  $Hx = y$ .
3. Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  produit d'au plus  $(n - 1)$  matrices de  $\mathcal{H}$  tel que  $PA = R$  soit triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Préciser la construction de  $P$  et  $R$ .
4. Proposer un algorithme basé sur les matrices de Householder donnant une factorisation  $A = QR$ , avec  $Q$  matrice orthogonale et  $R$  matrice triangulaire, en  $\frac{4}{3}n^3 + O(n^2)$  opérations élémentaires (additions, multiplications, divisions ou racines carrées).