Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2023/2024
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD/TP n°4 : résolution de systèmes non linéaires

Exercice 1. **(TP)** Le GPS est un système de positionnement basé sur le connaissance avec une grande précision de la distance du récepteur à trois satellites (situés à des orbites de l'ordre de 28 000 km).

Le recepteur (assimilé à un point P) reçoit d'un satellite S_1 des informations permettant de calculer sa distance d_1 à ce satellite. Notons $\Omega_1(d)$ l'ensemble des points de la terre à la distance d_1 du satellite S_1. On sait donc que $P \in \Omega_1(d_1)$. L'utilisation d'un deuxième satellite permet de dire que $P \in \Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2)$. Comme l'intersection de "courbes de niveaux" $\Omega_1(d_1)$ et $\Omega_2(d_2)$ n'est réduite à un seul point que dans le cas exceptionnel où ces courbes sont tangentes, l'utilisation d'un troisième satellite est nécessaire (et suffisante !) puisque

$$\Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2) \cap \Omega_3(d_3) = \{P\}.$$

On suppose qu'à l'instant où les distances sont calculées, les trois satellites ont les positions suivantes dans un repère cartésien dont l'origine est le centre de la terre :

$$\begin{aligned} S_1 &= (-11\,716.227\,778\,km,\ -10\,118.754\,628\,km,\ 21\,741.083\,973\,km) \\ S_2 &= (-12\,082.643\,974\,km,\ -20\,428.242\,179\,km,\ 11\,741.374\,154\,km) \\ S_3 &= (\ \ 14\,373.286\,650\,km,\ -10\,448.439\,349\,km,\ 19\,596.404\,858\,km). \end{aligned}$$

Les distances respectives au récepteur ont été calculées et valent

$$d_1 = 22\,163.847\,742\,km, \quad d_2 = 21\,492.777\,482\,km, \quad d_3 = 21\,492.469\,326\,km.$$

Calculer avec la méthode de Newton et un logioiel de votre choix la position exacte P du récepteur. Que représente $\|P\|_2$? (On rappelle que le rayon de la terre est d'environ 6 400 km.)

Exercice 2. (TD : méthode de Newton en dimension un)

Soit I un intervalle de d'intérieur non vide , $x_0 \in I$ et $c > 0$ tel que $J = [x_0 - c, x_0 + c]$ soit inclus dans I. Soit f une fonction réelle dérivable sur I et $\lambda > 0$ tel que

$$\begin{cases} (i)|f(x_0)| \leq \dfrac{c}{2\lambda}. \\ (ii)\forall (x,y) \in J^2,\ |f'(x)| \geq \dfrac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad |f'(x) - f'(y)| \leq \dfrac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

i) Montrer que f admet un unique zéro $\bar{x}$ dans J.

ii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque dans J, montrer qu'on peut définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans J telle que

$$x_0 \in J \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(u_n)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$ et $\exists c > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\bar{x} - x_n| \leq c2^{-n}$.

Exercice 3. (TD : estimation de l'erreur pour la méthode de la fausse position)

i) On considère une fonction $f \in C^2([a,b],)$ telle que $f(a)f(b) < 0$ et f' possède un signe constant sur $[a,b]$. On note correctement $\bar{x}$ l'unique zéro de f dans $[a,b]$. Soit

$$\rho = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Montrer qu'il existe des réels c et d dans $]a,b[$ tels que

$$\rho - \bar{x} = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(d)}|(\rho - a)(\rho - b)|.$$

ii) On construit une suite de segments emboités $[a_n, b_n]$ par la méthode de la fausse position (voir paragraphe 3.3) pour la fonction f précédente (avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$). Montrer que

$$b_n - a_n \leq \frac{4m}{M}\left[\frac{M}{4m}(b-a)\right]^{2^n}$$

avec $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ et $m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.