Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2023/2024
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n°5 : calcul différentiel

Exercice 1.

i) Calculer la différentielle de l'application de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = M^{-1}$.

ii) Montrer qu'une norme sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas différentiable en 0.

iii) La norme $||.||_1$ est-elle différentiable en dehors de 0 ?

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$, et la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$.

i) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x,y)| \leq C(x^2+y^2)$$

et

$$|g(x,y)| \leq C(x^2+y^2)$$

ii) En dduire que f et g sont deux fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$. On distinguera le cas du point $(0,0)$ des autres points de $\mathbb{R}^2$.

iii) .La fonction f (respectivement g) est-elle C^1 en $(0,0)$?

Exercice 3 On considère dans tout cet exercice une fonction f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

i) On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et que toutes ses dérivées partielles sont bornées par $M \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M\sqrt{n}||x-y||$$

où $||.||$ dsigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

ii) On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que f est continue en 0 et que toutes ses fonctions dérivées partielles tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. Montrer que f est différentiable en 0.

iii) On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que toutes ses dérivées partielles sont bornées par $M \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que f est continument prolongeable à $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $n \geq 2$. Dans ce cas, f est-elle nécessairement différentiable en 0 ?

Exercice 4.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sin(||x||^2) = \sin(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

1. Montrer que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer son gradient.
2. Montrer que la fonction f est C^2 et calculer sa matrice Hessienne.
3. Déterminer tous les extrema (minima et maxima) de f sur $\mathbb{R}^n$. Représenter graphiquement ces extrema dans le cas où $n = 2$.