6) Exemples de textes

* Une matrice de rotation 3D (texte 3)
* Le modèle de Leslie (texte 23)

On démontre ici le Corollaire 1 et le théorème 2 du texte 23 :

* preuve du corollaire 1 :

1) Pour simplifier, on suppose $A > 0$ (sinon raisonner sur A^k)

soit e un Vp de A tq $e > 0$ et $Ae = \rho(A)e$. Soit $\lambda \geq 0$

On a $\begin{cases} A(\lambda e) = \rho(A)(\lambda e) \\ Az \geq \rho(A) z \end{cases}$

soit $A(z - \lambda e) \geq \rho(A)(z - \lambda e)$

On note λ le plus petit réel ≥ 0

tq $\begin{cases} (z - \lambda e)_i = 0 \text{ et} \\ (z - \lambda e)_j \leq 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$

si $\exists j$ tq $(z - \lambda e)_j < 0$, alors

$$(A(z - \lambda e))_i = \sum_j A_{ij} (z - \lambda e)_j < 0 \quad (\text{car } A_{ij} > 0)$$

alors que $\rho(A)(z - \lambda e)_i = 0$

Ceci est absurde, donc $z = \lambda e$ et on a bien $z > 0$ et $Az = \rho(A)$.

2) si $0 \leq B \lneq A$, alors, par l'absurde, si $\rho(B) \geq \rho(A)$, on a l'existence de $z > 0$ tq $Bz = \rho(B) z$

En particulier $Az \geq \rho(B) z \geq \rho(A) z$

soit $Az = Bz$, ce qui est impossible car $z > 0$, $A, B \geq 0$ et $A \neq B$.

Preuve du théorème 2 :

$F(I-T)^{-1} = F\left(\sum_{k=0}^{+\infty} T^k\right)$ est une matrice positive.

Avec le théorème 1, il existe $e \gneq 0$ tq

$F(I-T)^{-1} e = Re$

soit $Fu = R(I-T)u$

(avec $u = (I-T)^{-1} e > 0$)

puis $\left(F + \frac{T}{R}\right) u = u$

$u > 0$ est donc un vecteur propre de $F + T/R$ à coefficients positifs par la valeur propre 1. La 3ème assertion du théorème 1 permet de conclure que $\rho\left(F + \frac{I}{R}\right) = 1$ //

On a donc bien avec le corollaire 1 :

* si $R<1$

$\frac{F}{R}+\frac{T}{R} \gneq F+\frac{T}{R} \gneq F+T$, ce qui permet d'affirmer que $\frac{\rho(P)}{R} > 1 > \rho(P)$

de plus

* si $R>1$:

$\frac{F}{R}+\frac{T}{R} \lneq F+\frac{T}{R} \lneq F+T$ soit :

$\frac{\rho(P)}{R} < 1 < \rho(P)$

* si $R=1$: $1=\rho(P)=R$