

# Séance 10 : algèbre linéaire, réduction d'endomorphismes, aspects théoriques

## 1) Principales définitions et premières propriétés

Déf :  $u$  endomorphisme de  $E, \mathbb{K} \text{ ev.}$   
 $x \in E$  est un vecteur propre de  $u$   
si  $x \neq 0$  et  $\exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$   
On dit alors que  $\lambda$  est une valeur  
propre de  $u$ .

Def (cas matriciel) :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$   
 $x \in \mathbb{K}^n$  est un vecteur propre de  $A$ ,  
si  $x \neq 0$  et si il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tq  
 $Ax = \lambda x$  (on note  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$  l'ensemble des  
valeurs propres)

Déf : soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  
 $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$   
le polynôme caractéristique de  $A$   
( $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ )

Proposition :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\lambda$  valeur propre de  $A$

$$\iff \chi_A(\lambda) = 0$$

On a également la propriété suivante:

si  $A, B \in \text{Ob } n(\mathbb{K})$ , alors

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

En particulier, si  $A$  et  $B$  sont semblables,

$$\text{alors } \chi_A = \chi_B$$

Ceci permet alors de définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Def:  $E$   $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle polynôme caractéristique de  $u$ , le polynôme caractéristique de  $\text{Mat}_{B,B}(u)$  ( $B$  base) de  $E$

Quelques exemples: 2

$$* \text{ si } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\chi_T(\lambda) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

\* si

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & c_0 \\ 1 & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\chi_C(X) = X^n - c_{n-1} X^{n-1} - \dots - c_0$$

Def :  $E, Kev, u \in \mathcal{L}(E)$   
Si  $\lambda \in K$  est une valeur propre  
de  $u$ , on a  $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id)$   
son espace propre associé.

(idem  $E_\lambda(A)$ , si  $A \in M_n(K)$ )

Théorème : soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  valeurs propres distinctes  
de  $u$ . Alors, les espaces propres

$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$  sont en  
somme directe.

(preuve : récurrence)

Def :  $E, Kev, u \in \mathcal{L}(E)$ . 3

\* On dit que  $u$  est diagonalisable  
s'il existe une base de  $E$  formée  
de vecteurs propres (c'est à dire :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i})$$

\* Si  $A \in M_n(K)$ , on dit  
que  $A$  est diagonalisable s'il existe  
 $D$  diagonale et  $P \in GL_n(K)$  tq  
 $A = P D P^{-1}$

Gn a le lien direct entre les 2  
notions :

Proposition  $E, K \text{ ev } \dim E = n$   
 $u \in L(E)$  est diagonalisable  
ssi  $\text{Mat}(u)$  est diagonalisable  
( $B$  base  $B$  quelconque de  $E$ ).

Def:  $A \in \text{M}_n(K)$ . On dit que  
 $A$  est triangulable, s'il existe  
Triangulaire supérieure et  $P \in \text{GL}_n(K)$

tel que:  $A = P T P^{-1}$

2) Premiers critères de réduction

On a le premier critère nécessaire <sup>4</sup>  
et suffisant de diagonalisabilité:

Théorème: soit  $A \in \text{M}_n(K)$ .  
Alors  $A$  est diagonalisable si et  
seulement si:

(i)  $\chi_A$  est scindé sur  $K$

(ii) si  $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$   
alors  $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ ,  
 $m_i = \dim(\text{Ker}(A - \lambda_i \text{Id}))$

multiplicité  
arithmétique

multiplicité  
géométrique

preuve: (exercice)



En supprimant (ii), on aboutit à un critère de trigonalisabilité :

Théorème : soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
 $A$  est trigonalisable si et seulement si  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

preuve (exercice)

Corollaire

\* Sur  $\mathbb{C}$ , toutes les matrices sont trigonalisables.

### 3) Polyômes d'endomorphismes / 5 (ou de matrices)

Def :  $E, \mathbb{K}$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}[X] : P(X) = \sum_{i=0}^p a_i X^i$ ,

on note

$$P(u) = \sum_{i=0}^p a_i \underbrace{u^i}_{\substack{\text{uemo-on} \\ p \text{ fois}}} \in \mathcal{L}(E)$$

(idem  $P(A)$ ) //

On remarque que l'application :

$$\varphi : \left( \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{array} \right)$$

est un morphisme d'algèbre :

$$\mathbb{K}(\mathbf{1})(u) = \text{Id}$$

$$(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$$

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

On remarque également que  
si  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ , on a

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

On définit la notion de polynôme annulateur :

Def :  $E$   $K$  ev,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On dit que  $P \in K[X]$  est un

polynôme annulateur de  $u$  / 6

si  $P(u) = 0_{R(E)}$  (et  $P \neq 0$ )

Proposition :  $E, K$  ev de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$  :  $u$  possède un polynôme annulateur.

preuve : La famille  $\{Id, u, u^2, \dots, u^{n^2}\}$  est liée dans  $\mathcal{L}(E)$  ( $K$  ev de dimension  $n^2$ ). //

Def :  $E, K, u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $u$  possède un polynôme annulateur

alors il existe  $m_u \in K[X]$  q

- \*  $m_u$  polynôme annulateur de  $u$
- \* si  $P$  polynôme annulateur de  $u$ ,

alors  $m_u$  divise  $P$ .

On dit que  $m_u$  est le polynôme minimal de  $u$  (en le supposant unitaire)  
(on utilise la division euclidienne dans  $K[X]$ ).

#### 4) Théorème de Cayley Hamilton

On a le résultat suivant :

Théorème : soit  $E$   $K$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  
On a  $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

(le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur).

preuve : plusieurs démonstrations possibles (algébriques, géométriques, matricielles). On présente ici une démonstration basée sur les matrices compagnons.

Soit  $v \in E$  quelconque. On note  
 $F = \text{Vect}(\{v, u(v), \dots, u^{k-1}(v)\})$

(et  $u^k(v) \in F$ ) base  $B$

$$[u|_F]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & c_0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 & c_{k-1} \end{pmatrix}$$

(on a  $u^k(v) = c_0 v + \dots + c_{k-1} u^{k-1}(v)$ )

On a  $\chi_{u|_F}(X) = X^k - c_{k-1} X^{k-1} - \dots - c_0$

On montre que  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$

En effet, par le théorème de 8  
 la base incomplète,  $B$  se complète  
 en une base  $E$  de  $E$ . et

$$[u]_E = \left( \begin{array}{c|c} C & E \\ \hline 0 & F \end{array} \right)$$

puis  $\chi_u(X) = \chi_{u|_F}(X) Q(X)$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \chi_u(v) &= (Q(X) \chi_{u|_F}(X))|_u(v) \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \chi_{u|_F}}}{=} (Q(u)) \stackrel{\substack{\uparrow \\ E}}{=} (Q(u)) (\chi_{u|_F}(v)) \\ &= (Q(u)) (0_E) = 0_E \end{aligned}$$

soit  $\chi_u(u) = 0$   
 $\mathbb{L}(E)$  //

Corollaire  $\chi_u$  est un polynôme  
annulateur de  $u$ . On a donc

$$m_u / \chi_u.$$

### 5) Nouveaux critères de diagonalisabilité

On dispose d'un nouveau résultat

Théorème : soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$   
 $A$  est diagonalisable si et seulement  
si son polynôme minimal est  
scindé et à racines simples

preuve: si  $A$  diagonalisable, 9

$$A = Q \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}} Q^{-1}$$

$$\text{On a } m_A(x) = m_{\mathcal{D}}(x)$$

$$\text{(car si } P \in \mathbb{K}[x], P(A) = QP(\mathcal{D})Q^{-1})$$
$$\text{puis } m_{\mathcal{D}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_p)$$

• Réciproquement, si

$$m_A(x) = \prod_{i=1}^p (x - \lambda_i), \text{ on a}$$

$$\frac{1}{m_A(x)} = \frac{a_1}{x - \lambda_1} + \dots + \frac{a_p}{x - \lambda_p}$$

(décomposition en éléments simples)

puis

$$1 = \sum_{i=1}^p a_i \underbrace{Q_i(X)}_{\prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)}$$

Ainsi, si  $Y \in K^n$ , on a

$$Y = \sum_{i=1}^p a_i \underbrace{Q_i(A)}_{Z_i} (Y)$$

avec

$$(A - \lambda_i I)(Z_i) = m_{A, \lambda_i}(Y)$$

soit  $Z_i \in \ker(A - \lambda_i I) = 0_{K^n}$

Ainsi  $E = \bigoplus_{\lambda_i} E_{\lambda_i}(A)$

et  $A$  est diagonalisable. 10

La démonstration redémontre un résultat plus général (Lemme des noyaux) :

Lemme : soit  $u \in L(E)$ , et

$P, Q \in K[X]$  premiers entre eux.

Alors, on a :

$$\ker((PQ)/u) = \ker(P/u) \oplus \ker(Q/u)$$

preuve : exercice (Bezout)

(extension à  $n$  polynômes premiers entre eux deux à deux)

Corollaire 1:  $A \in \text{db}_n(\mathbb{K})$  si et seulement si il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Corollaire 2: soit  $E, \mathbb{K} \text{ ev}, \dim E = n$

Soit  $u \in \mathcal{K}(E)$  diagonalisable.

Si  $F$  sev de  $E$  stable par  $u$ , alors  $u|_F$  est diagonalisable.

preuve:  $m_u(u|_F) = 0$

$\Downarrow$

$m_{u|_F}$  divise  $m_u$

$\Downarrow$

$m_{u|_F}$  scindé, racines simples et  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t X = \bigcup^r X$  avec  $\bigcup \neq 0$ .

6) Exercices, applications: 11  
le sujet MG 2017

L'essentiel du sujet porte sur l'algèbre linéaire et différents résultats de réduction

Exercices préliminaires:

Ex 1: si  $\text{rg}(A) = 1$ , il existe  $X \neq 0$

$\text{tg}$   $A = \begin{pmatrix} a_1 X & \dots & a_n X \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t X = \bigcup^r X$   
avec  $\bigcup \neq 0$ .

Réciproquement, si  $A = Y^T X$

alors les colonnes de  $A$  sont proportionnelles et  $A \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$ .

Cette décomposition n'est pas unique

car  $(\lambda Y)^T (\frac{1}{\lambda} X) = Y^T X$

Ex 2

$\varphi: \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})^* \\ A \rightarrow f_A \left( \begin{matrix} \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ M \mapsto \text{Tr}(AM) \end{matrix} \right) \end{pmatrix}$

est un isomorphisme :

- \*  $\varphi$  bien définie ( $f_A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})^*$ )
- \*  $\varphi$  linéaire (linéarité de la trace)
- \*  $\varphi$  bijective :  $A \in \text{Ker}(\varphi)$  implique

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

12

et avec  $M = E_{l,k} \ (1 \leq l \leq n \text{ et } 1 \leq k \leq m)$

on a  $f_A(M) = \text{Tr}(AM)$

$$= \text{Tr} \left( \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} E_{l,k} \right)$$

$$= \text{Tr} \left( \sum_i a_{i,l} E_{i,k} \right)$$

$$= a_{k,l} = 0$$

D'où  $A = 0$  par égalité des dimensions, on a bien  $\varphi$  bijective.



Ex3 : une CNS par qu'il existe

$$\exists \mathcal{B} \in \mathcal{B}_q \quad \text{Mat}(u)_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = A \text{ et } \text{rg}(u) = \text{rg}(A).$$

En effet, si  $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = r$   
 $\text{Mat}(u)_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  est semblable à  
 $\begin{pmatrix} \text{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , tout comme  $A$ .

Par transitivité, il existe  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  tq

$$\text{Mat}(u)_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = A.$$

Partie I:

$$1) \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u) \quad \Bigg\}$$

$$\text{Soit } \pi_u(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$$

On a donc

$$\mathbb{K}[u] = \text{Vect} \left( 1, \dots, u^{p-1} \right)$$

De plus  $\{1, \dots, u^{p-1}\}$  est libre

(sinon  $\pi_u$  n'est pas le polynôme annulateur). Ainsi

$$\dim(\mathbb{K}[u]) = p = \deg(\pi_u)$$

2)  $u$  nilpotent  $\Rightarrow \text{Tr}(u^p) = 0$

\*  $p = 1$  : on a  $\Pi_u(X) = X^n$  puis

$$\chi_u(X) = X^n. \text{ On en déduit}$$

$$\text{que } \text{Tr}(u) = 0$$

$$(\chi_u(X) = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u))$$

De plus  $u^p$  nilpotent  $\Rightarrow \text{Tr}(u^p) = 0$

3 a)  $\Pi_u = X^h Q$ . Comme

$$X \cdot 1_Q = 1, \text{ on a } X^h \cdot 1_Q = 1,$$

et par le lemme des noyaux :

$$E = \text{Ker}(\Pi_u|_u) = \underbrace{\text{Ker}(u^h)}_F \oplus \underbrace{\text{Ker}(Q|_u)}_G$$

$F$  stables par  $u$  car  $F$  et  $G$  sont de la forme  $\text{Ker}(P(u))$ .

$$\left( \begin{array}{c} \text{car } P(u)(u(x)) \\ \uparrow \\ \text{K}[X] \end{array} \right) = ((X P)(u)(x)) = u(0) = 0$$

b) On suppose  $G \neq \{0\}$ .

si  $x \in G$

$$Q(u)(x) = 0 \text{ soit}$$

$$Q(u_G)(x) = Q|_u(x) = 0$$

$$\Rightarrow Q|_{u_G} = 0_{\mathcal{L}(G)}$$

Or

$$Q(X) = a_p X^p + \dots + a_0 \neq 0$$

En prenant la trace de  $\mathbb{Q}(u_G)$ ,

$$\text{on a : } 0 = \sum_{i=1}^p a_i \text{Tr}(u_G^i) + \underbrace{a \dim G}_{\neq 0} \neq 0$$

On en déduit qu'il existe  $j \geq 1$  tq  
 $\text{Tr}(u_G^j) \neq 0$ . Or  $E = F \oplus G$

et

$$\text{Mat}(u^j)_{F \oplus G} = \left( \begin{array}{c|c} u_F^j & 0 \\ \hline 0 & u_G^j \end{array} \right)$$

Or  $u_F^j$  est nilpotente sur  $F$

$$((u_F^j)^k = 0) \text{ d'où } \text{Tr}(u_F^j) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(u^j) = 0 + \text{Tr}(u_G^j) \neq 0$$

$\Rightarrow$  absurde

c) On a donc  $G = \{0\}$ , ce qui implique que  $F = E$ ,  $u^k = 0$  et  $u$  nilpotente //

Q4 et Q6 à traiter en exercice

15