

Séance 11: équations différentielles

étude théorique

Objectif: étude d'un système d'équations différentielles du type:

$$(E) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in I \\ x(t_0) \in \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(I : intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant t_0)

où $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue (problème de Cauchy).

Exemples (issus de modélisation)

→ système proie-prédateurs 1
de Volterra:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a x_1(t) - b x_1(t) x_2(t) \\ x_2'(t) = -c x_2(t) + d x_1(t) x_2(t) \end{cases} \quad (a, b, c, d > 0)$$

→ pendule:

$$m l \ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

($x = (\theta, \dot{\theta})$)

→ etc... (ADN, biogaz, ...)

Quelques définitions préliminaires:

* solution locale au voisinage de $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$: existence de $x: V \rightarrow \Omega$ solution de (E)

(où V : voisinage de t_0 dans I).

* solution globale: existence de $X: I \rightarrow \Omega$ solution de (B).

* solution maximale: solution locale au voisinage de (t_0, X_0) n'admettant pas de prolongement (sur $V' \supset V$ ouvert)

I) Lemme de Gronwall et conséquences

Lemme: soit I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}_+$

telle que

$$\forall t \in I, \varphi(t) \leq C + k \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right|$$

alors on a :

$$\forall t \in I, \varphi(t) \leq C e^{k|t-t_0|} \quad 2$$

preuve: on suppose $t \geq t_0$.

$$\text{Soit } \Phi(t) = \left(C + k \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right) e^{-k(t-t_0)}$$

On a par définition :

$$\varphi(t) = \Phi(t) e^{k(t-t_0)}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= -k\Phi(t) + k\varphi(t) e^{-k(t-t_0)} \\ &= k(-\Phi(t) + \varphi(t) e^{-k(t-t_0)}) \\ &\leq 0 \text{ par hypothèse} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \Phi(t) \leq \Phi(t_0) = C$$

On a donc bien $\varphi(t) \leq C e^{k(t-t_0)}$

Ce lemme permet de démontrer //
un résultat d'unicité locale pour
les solutions de (B) :

Corollaire : on suppose que
 $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement
Lipschitzienne par rapport à sa
seconde variable, c'est à dire :
 $\forall (t_0, x_0) \in I \times \Omega, \exists V$ voisinage
de (t_0, x_0) tq

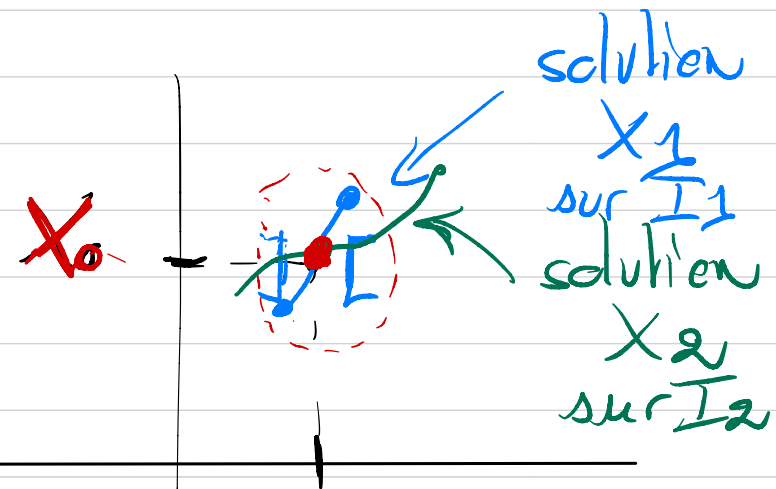
$\exists L > 0, \forall (t, x), (t, y) \in V,$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

Alors, si X_1 et X_2 solutions
locales de B autour de t_0 , telles
que $X_1(t_0) = X_2(t_0)$, alors

$X_1 = X_2$ sur leur intervalle
de définition commun.

preuve :



Soit $t \in I_1 \cap I_2$, t_0
On considère $\varphi(t) = \|X_1(t) - X_2(t)\|$

Gn'a $X_1(t) = X_1(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, X_1(s)) ds$

ce qui implique si $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$:

$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leq \int_{t_0}^t L \|X_1 - X_2\|(s) ds$$

Le lemme de Gronwall, implique que $\varphi(t) = 0$ sur $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

Gn déduit alors que $X_1 = X_2$ sur $I_1 \cap I_2$

par un principe de prolongement:

$$A = \{t \in I_1 \cap I_2 / X_1(t) = X_2(t)\}$$

(A fermé, ouvert, non vide

$$\Rightarrow A = I_1 \cap I_2)$$

II Un résultat d'existence 3
et d'unicité globale

Théorème (Cauchy-Lipschitz global): on suppose que f est globalement Lipschitz par rapport à sa seconde variable;

$$\exists L > 0, \forall (t, x_1, x_2) \in I \times \Omega^2, \|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq L \|x_2 - x_1\|$$

Alors, pour tout $X_0 \in \Omega$, il existe une unique solution globale de (6) telle que $X(t_0) = X_0$.

preuve: on se restreint à un compact K inclus dans I et on se place dans $E = \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$, muni de la norme:

$$\|X\|_L = \max_{t \in K} (\|X(t)\| e^{-2L|t-t_0|})$$

$(E, \|\cdot\|_L)$ est complet. On considère l'application

$$\underline{\Phi} : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & (t \mapsto X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds) \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \|\underline{\Phi}(X_2)(t) - \underline{\Phi}(X_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, X_2(s)) - f(s, X_1(s))) ds \right\| \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|X_2(s) - X_1(s)\| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq L \int_{t_0}^t \|X_2 - X_1\|_L e^{2L(s-t_0)} ds \cdot 4 \\ &\leq L \|X_2 - X_1\|_L \left[\frac{1}{2L} e^{2L(s-t_0)} \right]_{t_0}^t \\ &\leq \frac{1}{2} \|X_2 - X_1\|_L e^{2L(t-t_0)} \end{aligned}$$

D'où

$\|\underline{\Phi}(X_2) - \underline{\Phi}(X_1)\| \leq \frac{1}{2} \|X_2 - X_1\|$
 Le théorème de Picard assure l'existence et l'unicité de X

solution de $\mathcal{B}$ sur K telle que $X(t_0) = X_0$. On obtient le même résultat sur I entier par prolongement.

Remarque: le résultat est maintenu avec une hypothèse plus faible sur f : globalement Lipschitz sur tout compact de I

III } Le théorème de Cauchy-Lipschitz local

Il s'agit de la version la plus générale du théorème d'existence et d'unicité (dont le cas global précédent est un corollaire).

Théorème (Cauchy-Lipschitz local)

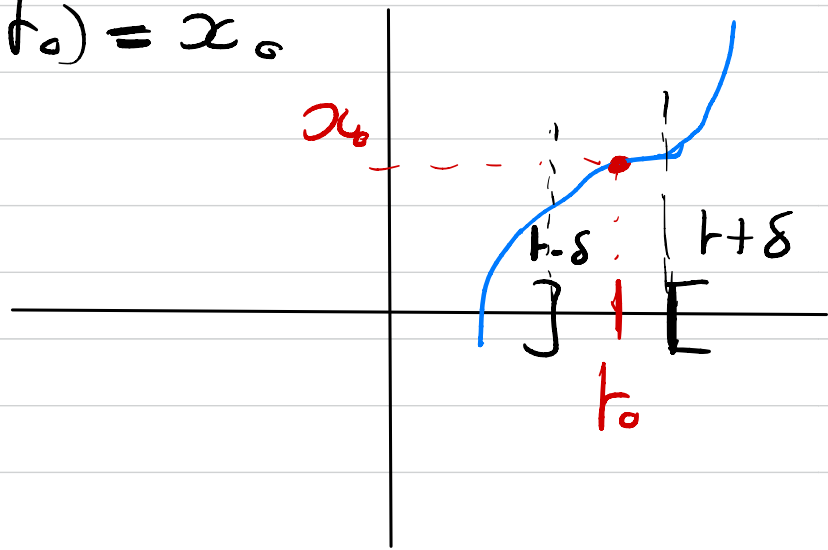
On suppose que f est continue⁵ et localement Lipschitzienne sur I par rapport à seconde variable. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, le problème (B) admet une unique solution maximale.

preuve: admise. 2 approches sont possibles: soit avec le théorème de Picard, soit à l'aide d'une suite d'approximations construites avec la méthode d'Euler (voir [Demailly]).

On peut montrer alors les corollaires suivants :

Corollaire : sous les hypothèses du théorème précédent, pour tout (t_0, x_0)

$\in I \times \Omega$, il existe $\delta > 0$ et γ une unique solution de (P) sur l'intervalle $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ telle que $\gamma(t_0) = x_0$.



6
Corollaire : sous les mêmes hypothèses, la solution maximale est définie sur un intervalle ouvert. (immédiat par l'absurde).

Le corollaire suivant traduit l'"explosion" de la solution aux limites de l'intervalle maximal :
Corollaire ("sortie de tout compact")

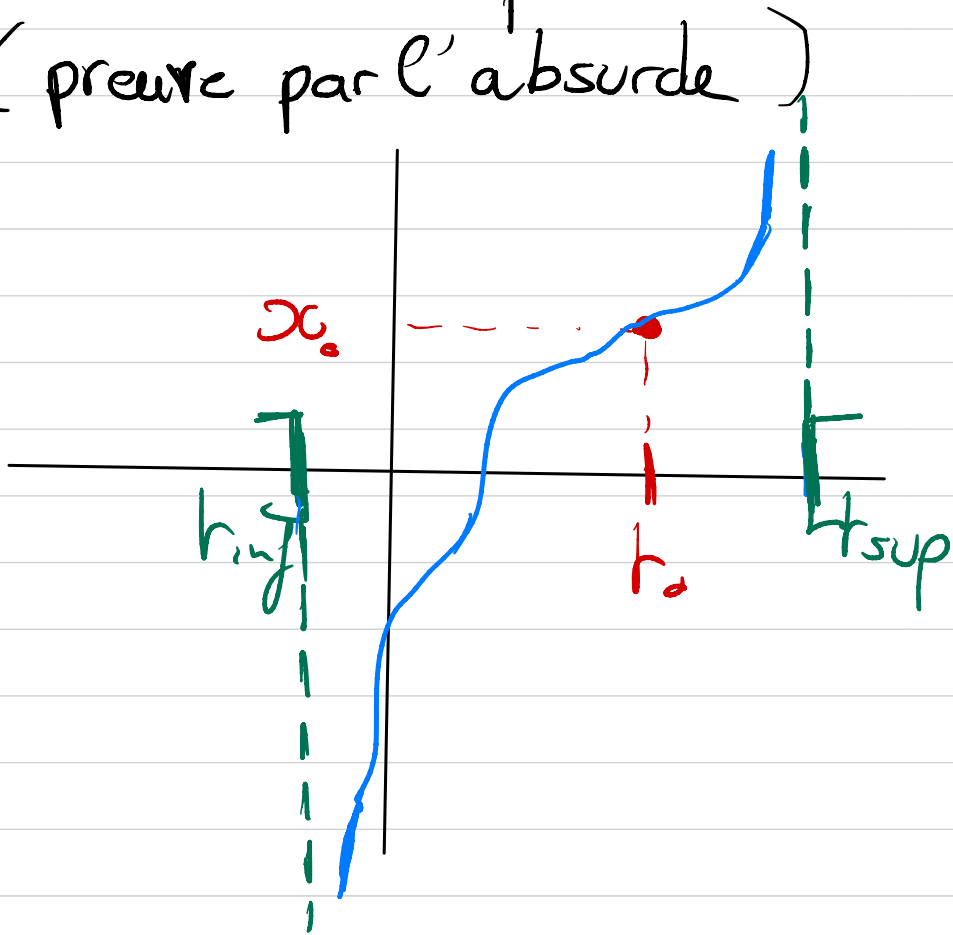
sous les mêmes hypothèses, on note $J =]t_{\inf}, t_{\sup}[$ l'intervalle où est définie la solution maximale.

Alors, $\forall K \subset \Omega$, K compact, $\exists t^* \in J$

$\hookrightarrow \forall t \in]t^*, t_{\sup}[$, $x(t) \notin K$

(idem avec $t_{\inf}$)

(preuve par l'absurde)



Quelques exemples :

* Volterra :

$$f(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} ax_1 - bx_1 x_2 \\ -cx_2 + dx_1 x_2 \end{pmatrix}$$

f est continue. De plus, f est localement Lipschitz par rapport à sa seconde variable car :

$$\|f(t, X) - f(t, Y)\|_{\infty} \leq L \|X - Y\|_{\infty} \quad (\text{localement en } X, Y).$$

$$\left(\leq K \|X - Y\|_{\infty} + \|X\|_{\infty} K \|X - Y\|_{\infty} \right)$$

$$(K = \max(a, b, c, d))$$

→ existence et unicité locale des solutions.

(On peut montrer que l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$, et que les solutions sont bi-périodiques)



* pendule :
(avec frottements)
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta - k \dot{\theta} \\ \theta(t_0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

$$f(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\omega^2 \sin x - ky \end{pmatrix} / 8$$

* f est continue, globalement Lipschitz par rapport à sa seconde variable.

$$(L = \text{Max}(1, \omega^2 + k))$$

→ existence et unicité globales.

* Remarque et contre-exemple:

sans l'hypothèse Lipschitz sur f ,

il existe un résultat d'existence appelé Cauchy-Peano (basé sur le théorème d'Ascoli). Par exemple,

le problème

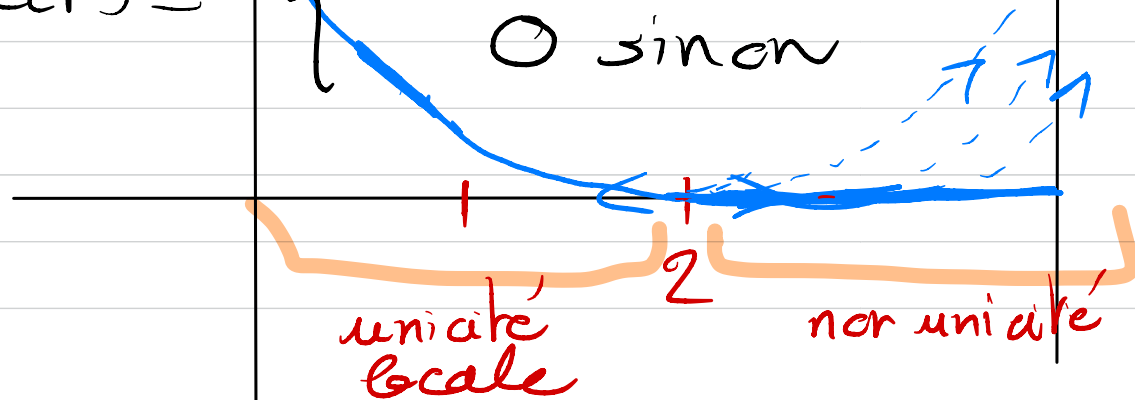
$$\left. \begin{array}{l} x' = -\sqrt{x} \\ x(0) = 1 \end{array} \right\}$$

admet par solutions :

$$\left(\frac{x'}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{x} = -\frac{1}{2}(t) + 1 \right. \\ \left. \rightarrow x = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)^2 \right)$$

$$x(t) = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)^2 \text{ mais aussi}$$

$$x(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2}t\right)^2 & \text{si } t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



IV Cas particulier important: 9 les systèmes dynamiques

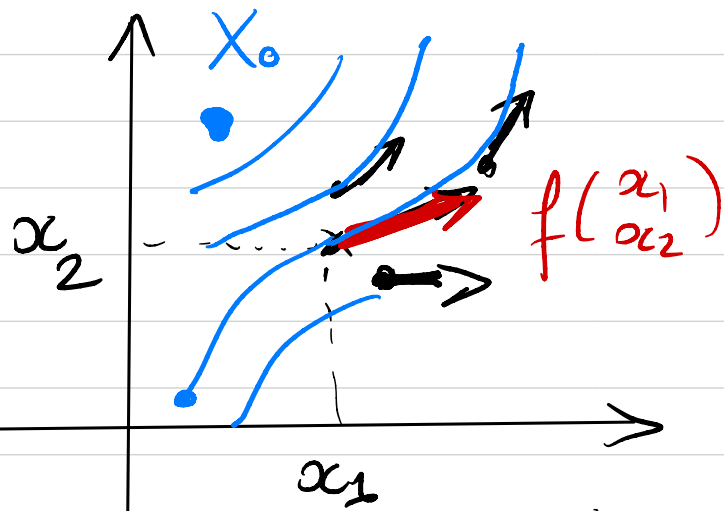
Dans de nombreuses situations,
on est amené à étudier des systèmes
du type: $X' = f(X)$
(E.D. autonomes)

On définit de nouvelles notions :

→ portrait de phase :
courbes paramétrées

$$t \mapsto (X_1(t), \dots, X_n(t)) \\ (n = 2 \text{ ou } 3)$$

($n=2$)



les courbes d'un portrait de phase
ne s'intersectent jamais (unicité)
de C.L.

→ points d'équilibre : $x_0 \in \mathbb{R}^n$
tq $f(x_0) = 0$

On définit la stabilité des points
d'équilibre d'un système dynamique
(possédant des solutions globales)

Déf : * soit x_0 un point d'équilibre. 10
 x_0 est stable si par tout voisinage
 V de x_0 , il existe un voisinage W
de x_0 tq la solution de

$$(E) \begin{cases} X' = f(X) \\ X(t_0) \in W \end{cases}$$

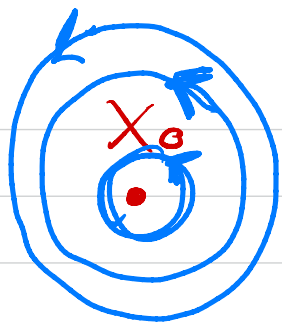
est telle que $X(t) \in V \forall t \in \mathbb{R}$

(x_0 instable si non stable)

* x_0 est asymptotiquement

stable s'il est stable et s'il existe
 W voisinage tq la solution de (E)
vérifie $X(t) \rightarrow x_0$ qd $t \rightarrow +\infty$

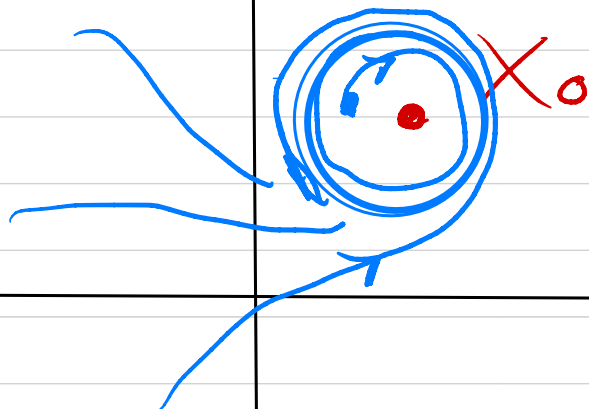
stable
mais non
asymptotiquement
stable



asymptotiquement
stable



instable



On cherche à caractériser la nature des points d'équilibre.

On étudie tout d'abord le cas linéaire :

$$X' = AX \text{ avec}$$

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

La caractérisation se fait à
des valeurs propres complexes de A ,
pour le seul point d'équilibre
 $x_0 = 0$.

Théorème :

* si $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), \operatorname{Re}(\lambda) < 0$,

alors X_0 est asymptotiquement stable.

* si $\exists \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), \operatorname{Re}(\lambda) > 0$,
alors X_0 est instable.

* si $Sp_{\mathbb{C}}(A) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$:

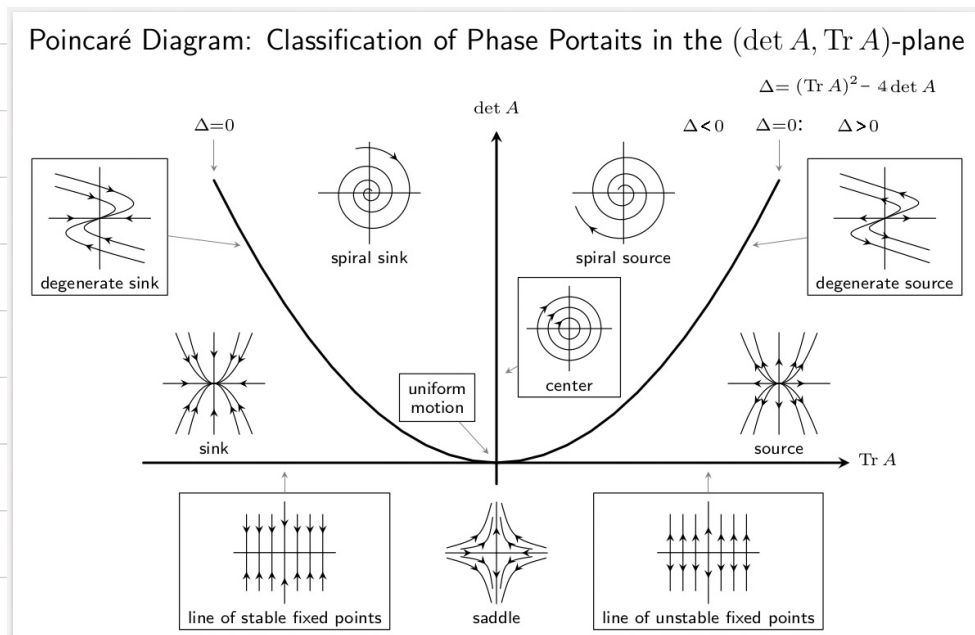
{ si aucune valeur propre n'est
defective (*) X_0 stable

sinon : X_0 est instable

(*) pas de bloc de Jordan du
type $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(preuve : outils à venir : exponentielle
de Matrices et décomposition de Jordan)

Cas particulier $n = 2$ / 12



(Wikipedia)

On peut déduire dans certains
cas, le comportement d'un système
général à partir de son
linéarisé autour de X_0 :

$$X' = f(X)$$

} (linéarisation)
↓

$$X' = \underbrace{Df(X_0)}_A (X - X_0)$$

Théorème on note $\Lambda = \max_{\lambda \in \text{Sp}_\mathbb{C}(A)} |\lambda|$

* si $\Lambda < 1$: alors X_0 est asymptotiquement stable.

* si $\Lambda > 1$, alors X_0 est instable.

* si $\Lambda = 1$, on ne peut rien dire.