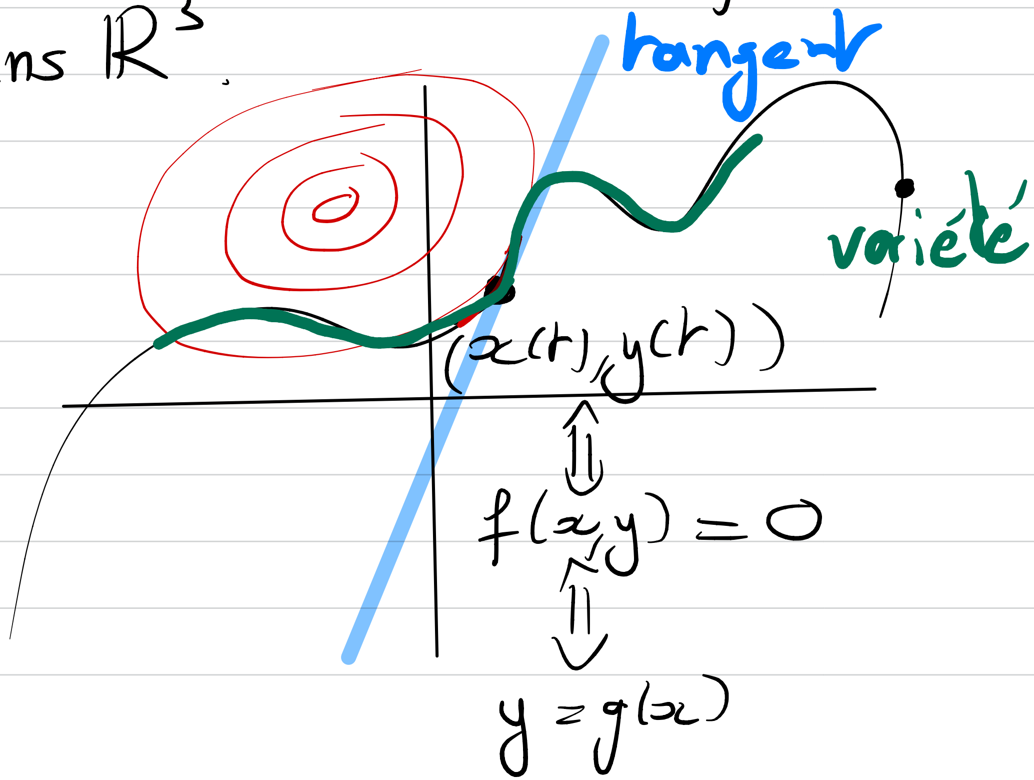
Séance 12 b : notions de géométrie différentielle

Il s'agit de donner un cadre général aux notions de courbes paramétrées (dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) ou de surfaces (nappes) dans $\mathbb{R}^3$.



I] Sous variété. Définitions équivalentes

On se place dans $\mathbb{R}^n$, qu'on assimilera à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ $(1 \leq p \leq n)$.

Déf : on dit que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k si $M \subset \mathbb{R}^n$ et pour tout $x_0 \in M$, il existe U ouvert voisinage de x_0 et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, C^k difféo tq

$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\})$

Autrement dit M est C^k difféomorphe à un sous espace vectoriel de dimension $\mathbb{R}^p$.

Il existe 3 définitions équivalentes à cette notion plus faciles à conceptualiser, basées sur les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites :

Def equivalente 1 (équation locale)

M est une sous variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension p, et de classe C^k si pour tout $x_0 \in M$, il existe U ouvert voisinage de x_0 et

$f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$, C^k tq

$df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-p})$ surjective et (f : submersion).

$\boxed{M \cap U = \{x \in U \text{ tq } f(x) = 0\}}$

Def equivalente 2 (paramétrisation locale)

M est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k, si pour tout $x_0 \in M$, il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$, V ouvert voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$ et

$j : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k tq

$j(0) = x_0$, $dj(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ injective et j est un homéomorphisme de V sur $M \cap U$ ($M \cap U = j(V)$)
(j : immersion)

Def equivalente 3 (graphe local)

M est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k si partout $x_0 = (y_0, z_0)$ dans M, il existe V ouvert voisinage de y_0, W ouvert voisinage ouvert de z_0) une fonction

$(y_0 \in \mathbb{R}^p,\ z_0 \in \mathbb{R}^{n-p})$

$g : V \xrightarrow{C^k} W$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que

rotation des axes

$$M \cap (V \times W) = \{A(\underbrace{y, g(y)}_{\mathbb{R}^n}), y \in V\}$$

* Quelques exemples :

* $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|x\|_2^2 = 1\}$ sous variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension $n-1$, de classe C^∞ ;

→ def équation locale :

$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum x_i^2 - 1 \end{pmatrix}$ on a

$df(x_0).h = 2\langle x_0, h\rangle$

surjective pour tout $x_0 \in S^{n-1}$.

* si U_p ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors

$M = U_p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p de classe C^∞

$\rightsquigarrow$ définition : $\varphi = id_{\mathbb{R}^n}$

si $U = U_p \times B(0_{\mathbb{R}^{n-p}}, r)$, alors

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\})$$

2) Espace tangent

Def soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k.

Si $x_0 \in M$, on note

$$\boxed{T_{x_0}M = \{v \in \mathbb{R}^n, \exists I \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ contenant } 0, \gamma : I \xrightarrow{C^1} M \text{ tq } \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma'(0) = v\}}$$

Par les 4 définitions, on peut exprimer $T_{x_0}M$ (sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$).

Théorème : on a l'expression suivante par $T_{x_0}M$:

→ def initiale :

$$T_{x_0}M = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\})$$

→ def equation locale :

$$T_{x_0}M = \mathrm{Ker}(df(x_0))$$

→ def paramétrisation locale :

$$T_{x_0}M = \mathrm{Im}(dj(0))$$

→ def graphe local

$$T_{x_0}M = \{A(h, dg(x_0).h), h \in \mathbb{R}^p\}$$

preuve : admise //

3) Extrema liés

On cherche une condition pour qu'une fonction f C^1, définie sur un voisinage ouvert de M soit minimale (ou maximale) localement sur M en $x_0 \in M$.

On a la condition necessaire suivante :

Théorème soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

$f : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, et

$$M = \left\{ x \in U \text{ tq } \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ \vdots \\ g_p(x) = 0 \end{cases} \right\}$$

où $g_1, \dots, g_p : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ tq

$\{\nabla g_1(x_0) \dots \nabla g_p(x_0)\}$ libre

On suppose que $x_0 \in M$ est un maximum ou minimum local de f sur M. Alors, il existe $\lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$ tq

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g(x_0)}$$

preuve : M est une sous variété de dimension $n-p$, C^1.

On utilise alors la définition "équation locale" de $T_{x_0}M$ puis un lemme d'algèbre linéaire.

Exemple : minimiser

$$\boxed{\begin{gathered} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{sur } S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x+y+z = 1\} \end{gathered}}$$

si $X_0 \in S$ est min (ou max) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\nabla f(X_0)$

soit $\begin{cases} x_0 = \lambda/2 \\ y_0 = \lambda/2 \\ z_0 = \lambda/2 \end{cases}$

Comme $x_0+y_0+z_0 = 1$, on a $\lambda = 2/3$ et $x_0 = y_0 = z_0 = 1/3$

Réciproquement, comme f est coercive sur $\mathbb{R}^2$:

$\lim\limits_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} f(x,y,z) = +\infty$ et que S est fermé, $f_{/S}$ possède au moins un minimum.

Il s'agit donc forcement du point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$