Séance 13 : algèbre linéaire, décomposition de Dunford-Jordan et applications

1) Sous espaces caractéristiques

déf : soit E $\mathbb{K}$ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre généralisé s'il existe $m \geq 1$ tq

$$(u - \lambda Id)^m(x) = 0$$

On note $E^\lambda(u) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(u - \lambda Id)^i$

On remarque que si $E^\lambda(u) \neq \{0\}$, alors $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$. (avec m minimal, $(u-\lambda Id)^{m-1}(x) \neq 0$ est un vecteur propre de u)

On appelle $E^\lambda(u)$ le sous espace caractérisque de u associé à λ.

Proposition (Exercice 1)

Soit $u_{/E^\lambda}$ la restriction de u à E^λ. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E^λ telle que

$$[u_{/E^\lambda}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

On a également le résultat suivant :

Proposition (Exercice 2)

On a $\boxed{\dim(E^\lambda) = m_a(\lambda)}$

(multiplicité algébrique de $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$)

Les sous espaces caractéristiques sont en somme directe :

Proposition :

$$\sum_{i=1}^{p} E^{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{p} E^{\lambda_i}$$

si $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$.

preuve : on utilise le lemme des noyaux et le fait que

$$(X-\lambda)^m \wedge (X-\mu)^m = 1$$

Enfin, on peut relier E^λ avec le polynôme minimal de u :

Proposition (Exercice 3)

On suppose χ_u scindé

On a $\boxed{E^\lambda(u) = \ker(u-\lambda Id)^\ell}$

où ℓ est la multiplicité de λ dans m, polynôme minimal de u.

2) Projecteurs spectraux

À partir de maintenant, on suppose que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$:

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{a_i}$$

(toujours vrai dans $\mathbb{C}$, mais pas forcément dans $\mathbb{R}$).

Dans ce cas, on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E^{\lambda_i}(u)$$

On note p_i $(1 \leq i \leq r)$ le projecteur sur E^{λ_i}, parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E^{\lambda_j}$.

Proposition : chaque p_i est un polynôme en u.

preuve : on décompose en éléments simples $\frac{1}{\chi_\lambda}$:

$$\frac{1}{\chi_\lambda}(X) = \sum_{i=1}^{r} \frac{U_i}{(X-\lambda_i)^{a_i}} \quad \text{d}^\circ \leq a_i - 1$$

On a :

$$1 = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{U_i \left(\prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)^{a_j} \right)}_{Q_i}$$

On a bien

$$x = \sum_{i=1}^{r} Q_i(u)(x)$$

et $Q_i(u) = p_i$ (on le vérifie sur chaque E^{λ_j})

(en particulier $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$)

3) Décomposition de Dunford

On rappelle la définition (et quelques propriétés) des endomorphismes nilpotents :

def : $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tq $u^m = 0$

(le plus petit m s'appelle l'indice de nilpotence)

Proposition : si u est nilpotent alors $u^n = 0$ (si $n = \dim E$)

Si $x \in E$ est tel que $u^{m-1}(x) = 0$ et $u^m(x) = 0$, alors

$\mathcal{L} = \{x, u(x), \dots u^{m-1}(x)\}$ est une famille libre et

$$[u/_{\mathcal{L}}] = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a le théorème suivant :

Théorème, si χ_u est scindé, alors $\boxed{u = d + n}$ où

- d : endomorphisme diagonalisable
- n : endomorphisme nilpotent

avec $d \circ n = n \circ d$ et d, n polynômes en u.

De plus cette décomposition est unique

preuve :

→ existence : on note avec les résultats précédents :

$$\begin{cases} d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \\ n = u - d \end{cases}$$

On a : $u = d + n$, d diagonalisable (sur $\bigoplus E^{\lambda_i}(u)$), d et n polynômes en u, donc $n \circ d = d \circ n$. Il reste à montrer que n est nilpotent :

* sur E^{λ_i} : $n(x) = u(x) - d(x)$
$= u(x) - \lambda_i x$
$= (u - \lambda_i Id)(x)$

soit $n^{a_i}(x) = (u - \lambda_i Id)^{a_i}(x)$
$= 0 \quad (x \in E^{\lambda_i})$

(Exercice 4)

→ unicité : (voir références) (basé sur la co-diagonalisation)

4) Décomposition de Jordan

Il s'agit d'une interprétation matricielle de la décomposition de Dunford.

def : on appelle bloc de Jordan une matrice du type

$$J_{\lambda, m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

On a $(J_{\lambda,m} - \lambda Id)^m = 0$

On a le résultat suivant :

Théorème : si χ_λ est scindé, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,n_1} & & & 0 \\ & J_{\lambda_1,n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{\lambda_r,n_r} \end{pmatrix}$$

Le nombre de tels blocs ne dépend que de u et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = Sp_{\mathbb{K}}(u)$

preuve : avec Dunford, on a $u = d + n$.

De plus, en considérant $\tilde{n} = n_{/E^{\lambda_i}}$, $\tilde{n}$ est nilpotente et on montre qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E^{λ_i} tq

$$[\tilde{n}] = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

(raisonnement simple de construction d'une base adaptée).

* Exemple de calcul de projecteurs spectraux :

si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

On calcule $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$

χ_A scindé. On calcule p_1 et p_2 avec la preuve constructive :

$$\frac{1}{\chi_A} = \frac{1}{(X-1)} + \frac{3-X}{(X-2)^2}$$

On a alors

$p_1 = (A-2I)^2$ et $p_2 = (3I-A)(A-I)$

5) Applications

5.1) Calcul de A^k et application

Le calcul effectif de A^k permet de calculer ensuite, par exemple, le terme général de suites récurrentes du type $U_{n+1} = AU_n$ (avec U_0 donné : $U_n = A^n U_0$)

→ si A est diagonalisable :

$A^k = PD^kP^{-1}$ (ou $A^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i$)

→ si A n'est pas diagonalisable

et que χ_A scindé : on a

$$A = D + N \text{ avec } DN = ND$$

puis
$$A^k = (D+N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j$$

$(DN = ND)$

$$= \sum_{j=0}^{\min(k,m)} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j$$

(au plus m termes)

En terme de projecteurs spectraux :

$$A^k = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{\min(k, a_i - 1)} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (A - \lambda_i I)^j \right)$$

5.2) Calcul d'exponentielle de matrices

Def : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

(convergence absolue)

On a les propriétés suivantes :

Proposition :

* si D diagonale, $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
* si $AB = BA$, alors
$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$
* $\exp(A)$ inversible et
$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

* $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$

(trigonalisation sur $\mathbb{C}$).

On peut calculer de manière explicite $\exp(A)$, si A diagonalisable, ou χ_A scindé, en s'inspirant des méthodes de calcul de A^k :

→ si A diagonalisable :

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

→ si χ_A scindé,

$$\exp(A) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \left(\sum_{j=0}^{a_i - 1} \frac{(A - \lambda_i I)^j}{j!} \right)$$

5.3) Résolution de systèmes linéaires d'ED.

On cherche à résoudre explicitement les systèmes du type $X'(t) = AX(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $X(0) = X_0$.

Le résultat, déjà vu, permet d'obtenir les solutions explicites sous la forme :

$$X(t) = \exp(tA) X_0$$

La décomposition de Dunford permet alors d'exprimer $X(t)$.

6) Retour aux exercices :

Exercice 1

Soit $u_{/E^\lambda}$ la restriction de u à E^λ. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E^λ telle que

$$\boxed{[u_{/E^\lambda}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}}$$

$$\left(E^\lambda(u) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \operatorname{Ker}\left((u-\lambda I)^i\right)\right)$$

On a :

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(u-\lambda I) \subsetneq \operatorname{Ker}\left((u-\lambda I)^2\right) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(u-\lambda I)^m = \operatorname{Ker}(u-\lambda I)^{m+1}$$

On construit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ tq

tq $e_1, \dots, e_{n_1} \in \operatorname{Ker}(u-\lambda I)$

$e_{n_1+1}, \dots, e_{n_2} \in \operatorname{Ker}(u-\lambda I)^2$

$\vdots$

$e_{n_{m-1}}, \dots, e_p \in \operatorname{Ker}(u-\lambda I)^m$

alors, si $e_i \in \operatorname{Ker}(u-\lambda I)^k$,

$u(e_i) - \lambda e_i \in \operatorname{Ker}(u-\lambda I)^{k-1}$

et $u(e_i) = \lambda e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j e_j$

et $[u_{/E^\lambda}]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

Exercice 2

On a $\boxed{\dim(E^\lambda) = m_a(\lambda)}$

(multiplicité algébrique de $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(u)$)

On utilise le résultat de l'exercice 1 :

On complète $\mathcal{B}$ base adaptée de E^λ en une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$.

$$[u]_{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & * & B \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & D \end{array}\right)$$

On a donc

$$\chi_u(X) = (X-\lambda)^\alpha \chi_D(X)$$

On a donc $\dim(E^\lambda) = \alpha \le m_a(\lambda)$

Il reste à montrer que $(X-\lambda)$ ne divise pas $\chi_D(X)$.

Par l'absurde, il existe $x \in E$ tq

$$\begin{cases} x \notin E^\lambda \\ u(x) = \lambda x + \underbrace{w}_{\in E^\lambda} \end{cases}$$

ainsi $u(x) - \lambda x \in E^\lambda$

$\exists m$ tq $(u-\lambda I)^m(u(x)-\lambda x) = 0$

soit : $(u-\lambda I)^{m+1}(x) = 0$

soit $x \in E^\lambda$: absurde (on a bien $\alpha = m_a(\lambda)$)

Exercice 3) On suppose χ_u scindé.

On a $\boxed{E^{\lambda}(u) = \ker(u-\lambda Id)^{\ell}}$

où ℓ est la multiplicité de λ dans m, polynôme minimal de u.

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{a_i}$$

$$\Downarrow$$

$$m_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$$

$(m_i \leq a_i)$

On a en particulier

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u-\lambda_i I)^{m_i}$$

Avec les exercices précédents, on a

$$E = \bigoplus \underbrace{\ker(u-\lambda_i I)^{a_i}}_{E^{\lambda_i}}$$

De plus :

$$\ker(u-\lambda_i I)^{m_i} \subset E^{\lambda_i}$$

Avec un argument de dimension, on a bien

$$\ker(u-\lambda_i I)^{m_i} = E^{\lambda_i}$$

Exercice 4 | unicité dans la décomposition de Dunford

on utilise le Lemme de co-diagonalisation : si u, v diagonalisables et $u \circ v = v \circ u$, alors u et v sont diagonalisables dans la même base.

Par l'absurde :

$u = d + n$ et $u = d' + n'$:

$d - d' = n' - n$

Or n' et n commutent : en effet, n et n' sont des polynômes en u.

Par conséquent, $n - n'$ est nilpotent :

$$(n - n')^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{k}{N} n^k (-n')^{N-k}$$

Avec $N = m + m'$ (indices de nilpotence de n et n')

on a bien $(n - n')^N = 0$

Comme $dd' = d'd$, d et d' sont co-diagonalisables, $d - d'$ est donc diagonalisable et nilpotente : elle est donc nulle :

$d = d'$ et $n = n'$ //