

Séances 19 : applications autour de l'inversion locale et des fonctions implicites

Dans cette séance on propose 4 exercices utilisant l'un de ces 2 théorèmes :

Ex 1 } On considère l'application

$$\Phi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y \right) \end{pmatrix}$$

L'objectif est de montrer que Φ

est un C^1 -difféomorphisme¹
On commence par montrer qu'il s'agit d'un C^1 difféomorphisme local en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

Etape 1: Φ est C^1 par composition et opérations élémentaires (Φ est C^∞).

Etape 2: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d\Phi(x, y) \in GL_2(\mathbb{R})$

On calcule la matrice Jacobienne:

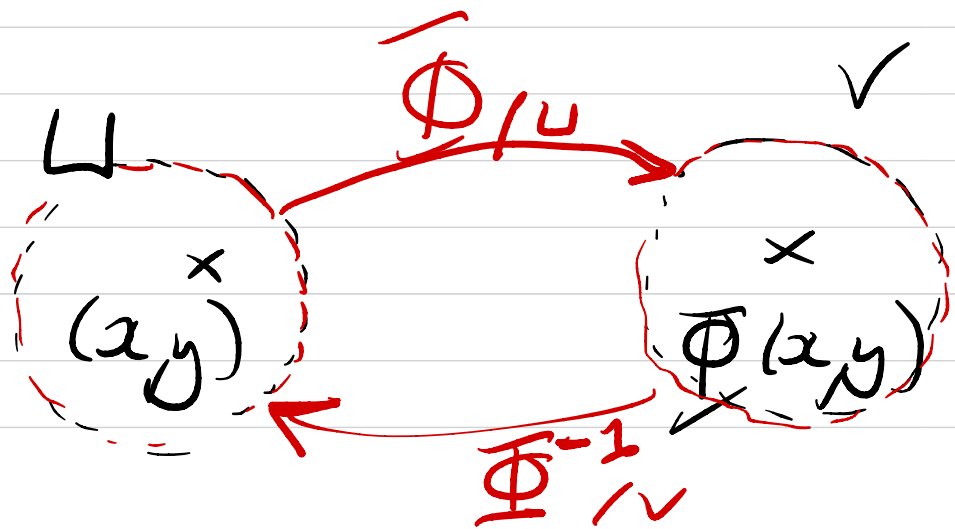
$$d\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{y}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$\det(d\Phi(x,y)) = 1 - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \neq 0$$

$$\text{car } |\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right)| \leq 1.$$

Grâce au théorème d'inversion locale, on en déduit que Φ est un C^1 difféomorphisme local.



2
Pour avoir un C^1 difféomorphisme global, on doit seulement montrer que Φ est bijective.

→ Φ injective: soient $(x,y), (x',y')$

$$\text{tq } \begin{cases} \sin\left(\frac{y}{2}\right) - x = \sin\left(\frac{y'}{2}\right) - x' \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y = \sin\left(\frac{x'}{2}\right) - y' \end{cases}$$

On utilise le T.A.F. (vrai aussi si $y=y'$)

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{y}{2}\right) - \sin\left(\frac{y'}{2}\right) = \frac{1}{2}(y-y') \cos\left(\frac{u}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x'}{2}\right) = \frac{1}{2}(x-x') \cos\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y-y') \cos\left(\frac{u}{2}\right) = x-x' \\ \frac{1}{2}(x-x') \cos\left(\frac{u}{2}\right) = y-y' \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{4}(x-x') \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) = x-x'$$

* Si $x \neq x'$, on a $\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) = 1$
ce qui est impossible.

D'où $x = x'$. De même,

$$\frac{1}{4}(y-y') \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) = y-y'$$

et il vient $y = y'$.

→ Φ est surjective :

(indication : $\Phi(\mathbb{R}^2)$ est ouvert et fermé).

* $\Phi(\mathbb{R}^2)$ ouvert : grâce au résultat obtenu avec le théorème d'inversion locale, si $(\alpha, \beta) \in \Phi(\mathbb{R}^2)$ il existe un voisinage V de (α, β)

$$\text{t.q. } V \subset \Phi(\mathbb{R}^2).$$

* $\Phi(\mathbb{R}^2)$ fermé : soit (x_n, y_n)

$$\text{t.q. } \begin{cases} \sin\left(\frac{y_n}{2}\right) - x_n \rightarrow \alpha \\ \sin\left(\frac{x_n}{2}\right) - y_n \rightarrow \beta \end{cases}$$

$$\text{On veut : } (\alpha, \beta) \in \Phi(\mathbb{R}^2)$$

on a $\alpha_n = \sin(y_n) - x_n$

$\downarrow$
bornée α

$\underbrace{\quad}_{\text{bornée}}$

On en déduit que (α_n) est bornée.

De même (y_n) est bornée.

Par Bolzano-Weierstrass,
il existe x et y tq

$$x_{\varphi(n)} \rightarrow x \text{ et } y_{\varphi(n)} \rightarrow y$$

(double extraction).

On en déduit par passage à la limite

$$\begin{cases} \sin(y/2) - x = \alpha \\ \sin(x/2) - y = \beta \end{cases}$$

et ainsi $(\alpha, \beta) \in \Phi(\mathbb{R}^2)$.

Par connexité de $\mathbb{R}^2$, $\Phi(\mathbb{R}^2)$
non vide, ouvert et fermé est égal à $\mathbb{R}^2$.

On a bien prouvé, grâce au
théorème d'inversion globale que
 Φ est un C^1 difféomorphisme
de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 2) On veut montrer le résultat suivant, parfois appelé théorème du rang constant:

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, C^1 et dont la différentielle est de rang constant sur un voisinage de $b \in \mathbb{R}^n$, égal à $r \in [0, n]$. Alors il existe un changement de coordonnées (C^1 difféo) $x \mapsto X$ (autour de b) et $y \mapsto Y$ (autour de $f(b)$) tq

$$\begin{array}{ccc} X = (X_1, \dots, X_n) & \xrightarrow{A} & (X_1, \dots, X_r, 0, \dots, 0) = Y \\ \uparrow & f & \downarrow \\ x & \dashrightarrow & y \end{array}$$

* Etape 1 : on se ramène à $b=0$, $f(b)=0$ et $df(b) \equiv A$ (projection)

On change f en $\tilde{f}$ tq $\tilde{f}(h) = f(b+h) - f(b)$ puis $\tilde{f}$ en $\hat{f}$ tq

$$\hat{f}(u) = Q \tilde{f}(P u)$$

$$d\hat{f}(0) = A \stackrel{r}{=} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{cor } A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inversibles}}}{Q} \underset{\substack{\nearrow \\ \text{P}}}{df(0)}$$

(toute matrice de rang r est équivalente à A).

Etape 2 : montrer que les relations :

$$(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n)$$

définissent un changement de coordonnées locales autour de $(0, \dots, 0)$
 $(\equiv C^1 \text{ diffeomorphisme})$

On utilise le théorème d'inversion locale :

$$\tilde{\Phi}: (\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2) \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n)$$

* $\tilde{\Phi}$ est C^1 et

$$* d\tilde{\Phi}(0) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \uparrow \text{ inversible}$$

$$(df(0) = A) //$$

Etape 3 on a $y = f(x) = \psi(x)$
 localement autour de 0. Montrer

que seules les r premières coordonnées de X apparaissent dans ψ .

On a

$$y = f(x) = \Psi(f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$$

$$\parallel$$

$$(f_1, \dots, f_n)$$

Ainsi

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, \Psi_{r+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \Psi_n)$$

D'où

$$d\Psi(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \end{pmatrix}$$

Or $\text{rg}(d\Psi) = \text{rg}(f) = r$
 en tout $(x_1, \dots, x_n)$ (chgt de variables $\equiv C^1$ difféo).

On en déduit que

$$\boxed{f_{r+1}, \dots, f_n} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_{r+1}}{\partial x_{r+1}} & \dots & \frac{\partial \Psi_{r+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_{r+1}} & \dots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 0$$

et ainsi

$\Psi_{r+1}, \dots, \Psi_n$ ne dépendent pas de $x_{r+1}, \dots, x_n$ tout comme Ψ

On passe à la dernière étape :

Etape 4: Montrer que les relations:

$$(y_1, \dots, y_n) = (Y_1, \dots, Y_r, \Psi(Y_1, \dots, Y_r) + Y_{r+1}, \dots, \Psi(Y_1, \dots, Y_r) + Y_n)$$

définissent un chgt de variable qui répond à la question initiale.

On utilise le théorème d'inversion locale:

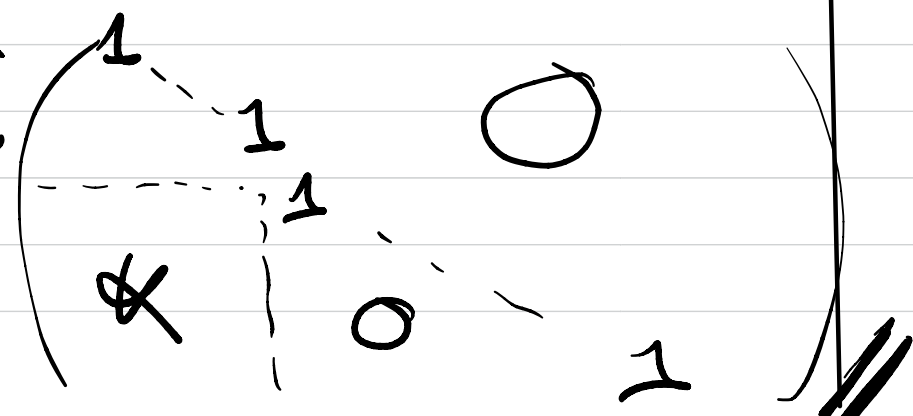
$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(Y_1, \dots, Y_n) \mapsto (Y_1, \dots, Y_r, \Psi(Y_1, \dots, Y_r) + Y_{r+1}, \dots, \Psi(Y_1, \dots, Y_r) + Y_n)$$

* $g \in C^1$

$$dg(0) =$$

inversible



On vérifie enfin que: 8

$$x \xrightarrow{\Phi} X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{\Sigma} y \equiv f(x)$$

En effet:

$$x \mapsto X \xrightarrow{A} Y = (f_1, \dots, f_r, 0, \dots, 0)$$

$$\downarrow$$

$$(f_1, \dots, f_r, f_{r+1} + 0, \dots, f_n + 0)$$

Ex 3 \ Sat l'équation

$$x^7 + 0,99x - 2,03 = 0$$

Cette équation possède une solution

x_0 unique, proche de 1.

Calculer une approximation de x_0 ,
plus précise que la valeur 1.

(sans recourir à un algorithme numérique
trop coûteux).

On considère :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \\ (x, p, q) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (x, p, q) \mapsto x^7 + px - q$$

On a :

$$* f(\underset{\substack{\uparrow \\ x_0}}{1}, \underset{\substack{\uparrow \\ 0,99}}{1}, \underset{\substack{\nwarrow \\ 2,03}}{2}) = 0$$

On cherche alors à exprimer

x_0 en fonction de p, q :

$x_0 \neq \varphi(p, q)$ puis à

approcher x_0 par

$$\varphi(1, 2) + d\varphi(1, 2)(h)$$

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ (-0,01)}}{1}, 0,03)$$

On vérifie que f satisfait les
conditions pour appliquer le théorème
des fonctions implicites :

On a :

* f est C^1 (théorèmes généraux)

$$* \frac{\partial f(1, 1, 2)}{\partial x} = 7x^6 + p \Big|_{(1, 1, 2)}$$

$$= 8 (\neq 0)$$

L'existence de γ est bien assurée.

De plus :

$$\underbrace{d\gamma(p, q)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} = - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(\star)} df \Big|_{(p, q)} \quad (*)$$

$$(f(\gamma(p, q)), p, q) = 0$$

$$\text{En particulier, } \gamma(1, 2) = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$x_0 = \gamma(0.99, 2.03)$$

$$\approx \gamma(1, 2) + \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0.03 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{8} (0.01 + 0.03)$$

$$= 1 + \frac{1}{8} (0.04)$$

$$= 1.005$$

(avec Python, on trouve la valeur approchée plus précise :

$$1.0049415)$$

10

Ex 4) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère l'équation :

$$(x-a)(x-b) - \varepsilon x^3 = 0$$

1) Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'équation admet 3 solutions distinctes $\alpha_1(\varepsilon) < \alpha_2(\varepsilon) < \alpha_3(\varepsilon)$

2) Donner un développement asymptotique à l'ordre 1 en ε de ces 3 solutions //

1^{ère} idée :

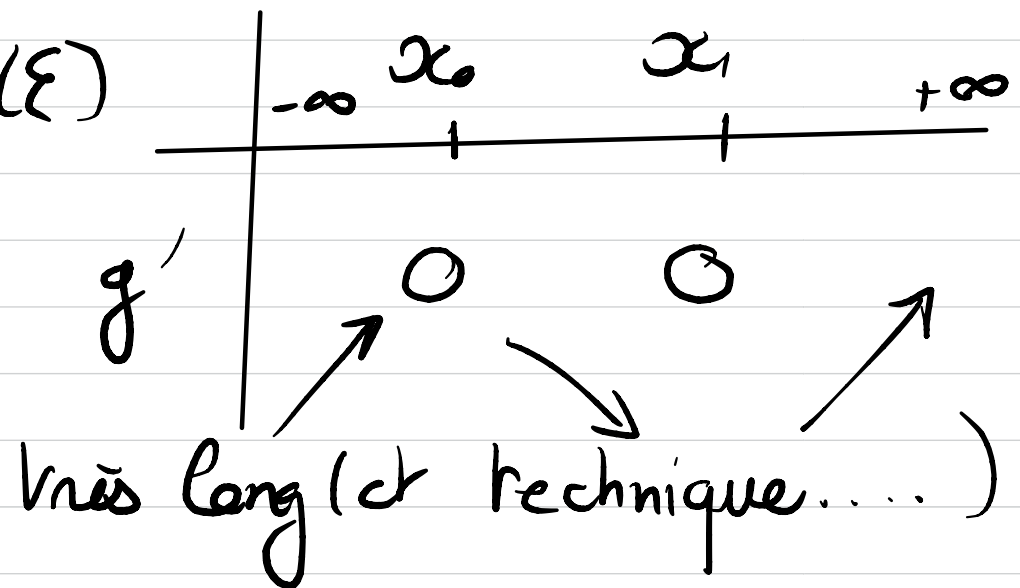
$$g(x) = \varepsilon x^3 - (x-a)(x-b)$$

$$g'(x) = 3\varepsilon x^2 - (x-a) - (x-b)$$

$$= 3\varepsilon x^2 - 2x + a + b$$

$$\Delta = 4 - 3\varepsilon(a+b) > 0$$

si $\varepsilon < \frac{4}{3(a+b)}$



2^{ème} idée : fonctions implicites (2 fois)

Soit

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & (x-a)(x-b) - \varepsilon x^3 \end{matrix}$$

On a $f(a, 0) = 0$ et $f(b, 0) = 0$

De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varepsilon) = -3\varepsilon x^2 + 2x - a - b$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0) = 2a - a - b = a - b \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(b, 0) = 2b - a - b = b - a \neq 0$$

Ainsi, il existe un voisinage de 0, noté U , et un voisinage de a , noté V_1 , tq

$$\left. \begin{matrix} f(x, \varepsilon) = 0 \\ x \in V_1 \\ \varepsilon \in U \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1(\varepsilon) \\ \varepsilon \in U \end{cases}$$

De même, il existe un voisinage de b , noté V_2 , tq

$$\left. \begin{matrix} f(x, \varepsilon) = 0 \\ x \in V_2 \\ \varepsilon \in U \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2(\varepsilon) \\ \varepsilon \in U \end{cases}$$

On dispose donc de 2 solutions

distinctes à $f(x, \varepsilon) = 0$

Comme il s'agit d'un polynôme de degré 3 en x , la 3^{ème} solution est réelle. En la notant $x_3(\varepsilon)$, on a

$$f(x, \varepsilon) = -\varepsilon(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

et par identification du terme en x^2

$$1 = -\varepsilon(-x_1 - x_2 - x_3), \text{ soit :}$$

$$x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - x_1(\varepsilon) - x_2(\varepsilon)$$

($x_3(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et est bien distincte de x_1 et x_2)

2) On utilise le résultat sur les dérivées partielles du théorème des F.I. :

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) = - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varepsilon)} \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \right)$$

En particulier

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon}(a, 0) &= \frac{-1}{a-b} (-a^3) \\ &= \frac{a^3}{a-b} \end{aligned}$$

$$\text{et } x_1(\varepsilon) = a + \frac{a^3}{a-b} \varepsilon + o(\varepsilon)$$

De même,

$$x_2(\varepsilon) = b + \frac{b^3 \varepsilon}{b-a} + o(\varepsilon)$$

or

$$x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x_1 = x_2 //$$