Séance 20 : exercices autour des théorèmes de Picard et de Cauchy-Lipschitz

Ces 2 théorèmes, déjà vus, donnent un résultat d'existence et d'unicité de 2 types de problèmes :

* résolution d'une équation du type $f(x) = x$
* résolution d'une E.D. du type
$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1) Exercices autour du théorème de Picard

Ex 1) : Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue f sur $[0,1]$ telle que :

$\forall x \in [0,1]$,
$$f(x) = \sup_{y \in [0,1]} \left(\cos(x^2 - y^2) + \alpha f(y)\right)$$

Avant toute chose :

$\sup_{y \in [0,1]} \left(\cos(x^2 - y^2) + \alpha f(y)\right)$ existe pour tout $x \in [0,1]$ et tout $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

car $f_x \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \cos(x^2-y^2)+\alpha f(y) \end{array} \right)$

est continue sur $[0,1]$ compact.

Soit $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ espace de Banach. On note :

$$\Phi : \left(\begin{array}{ccc} (E, \| \ \|_\infty) & \to & (E, \| \ \|_\infty) \\ f & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup(f_x) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

* On a bien $\Phi(f) \in E$ car $\left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & E \\ x & \to & f_x \end{array} \right)$ est continue et $\left(\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \sup(f) \end{array} \right)$ est continue.

* Φ est strictement contractante :

Soit $f, g \in E$:

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \overset{?}{\leq} K \|f-g\|_\infty$$

$(K<1)$

On a :

TSVP

$$\sup_y \left(\cos(x^2-y^2)+\alpha f(y)\right) - \sup_y \left(\cos(x^2-y^2)+\alpha g(y)\right)$$

$$\leq \sup_{y\in[0,1]} \left(\alpha(f(y)-g(y))\right) \leq \alpha \|f-g\|_\infty$$

(se montre en 2 temps : $f=(f-g)+g$
et $f \leq \sup(f-g)+\sup(g)$)

$\Rightarrow$

$$\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x) \leq \alpha \|f-g\|_\infty$$

puis

$$\|\Phi(f)-\Phi(g)\|_\infty \leq \alpha\|f-g\|_\infty$$

Ainsi, par le théorème de Picard, il existe une unique fonction $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tq $\forall x\in[0,1]$,

$$f(x) = \sup_y\left(\cos(x^2-y^2)+\alpha f(y)\right)$$

Ex 2)

On considère une suite réelle telle que :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin(n) \end{cases} \quad (\ast\ast)$$

Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tq la suite (x_n) est bornée et à valeurs positives

Etape 1 : Si (x_n) est bornée et à valeurs positives, alors $10 \leq x_n \leq 11$

Etape 2 : Montrer qu'il existe une unique suite $(x_n) \in [10, 11]^{\mathbb{N}}$ du type $(**)$

Etape 3 : conclure (immediat avec Etape 1 et Etape 2)

Etape 1 : on montre que si $x_0 \notin [10, 11]$, alors la suite $(**)$ ne peut rester positive et bornée (contraposition) :

→ si $0 \leq x_0 < 10$, alors $x_1 < 0$: impossible,

→ si $x_0 \geq 11$: $x_1 \geq 21 + \sin(0) = 21$ et on peut montrer que $x_n \to +\infty$ (recurrence : $x_n \geq 11$ puis $x_{n+1} \geq x_n^2$, $\ln(x_{n+1}) \geq 2 \ln(x_n)$ puis $\ln(x_n) \to +\infty$ et $x_n \to +\infty$)

Etape 2 : on définit

$E = \{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } 10 \leq x_n \leq 11 \}$

et $d((x),(y)) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\text{Max}} |x_n - y_n|$

On construit

$$\Phi \left(\begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ (x)_n \longmapsto \left(\begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto z_n = \sqrt{100 - \sin n + y_{n+1}} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

On montre que Φ est bien définie et contractante :

Rappel : $(**)$

$x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n$

* Φ bien définie :

$10 \leq y_{n+1} \leq 11$

$\Rightarrow 109 \leq 100 - \sin n + y_{n+1} \leq 112$

$\Rightarrow \sqrt{109} \leq z_n \leq \sqrt{112}$

soit $z_n \in [10, 11]$ //

* Φ est contractante :

$d(\Phi(x), \Phi(y)) \overset{?}{\leq} K d((x),(y))$

On a

$$\sqrt{100-\sin n+y_{n+1}}-\sqrt{100-\sin n+x_{n+1}}$$

$$=\frac{y_{n+1}-x_{n+1}}{\sqrt{100-\sin n+y_{n+1}}+\sqrt{100-\sin n+x_{n+1}}}$$

puis

$$d(\Phi(y),\Phi(x)) \leq \frac{d((y),(x))}{2\sqrt{100-1+10}}$$

$$\leq \frac{d((y),(x))}{20}$$

$\Rightarrow$ Φ possède un unique point fixe $(x_n)\in[10,11]^{\mathbb{N}}$ telle que :

$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$x_n=\sqrt{100-\sin n+x_{n+1}}$$

soit :

$$x_{n+1}=x_n^2-100+\sin n$$

(et $x_0\in[10,11]$ uniquement déterminé) //

Remarque : le théorème de Picard propose en outre une approximation de la suite (x_n) :

$$(x)\simeq\Phi^N((10,10,\dots,10))$$

(N grand)

2) Exercices autour du théorème de Cauchy-Lipschitz

Ex3 Soit l'ED :

$$(1)\begin{cases} y(t_0) \in \mathbb{R} & (t_0 > 0) \\ y'(t) = \dfrac{\cos(y(t))}{t}, & t > 0 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une unique solution y de (1) sur $]0,+\infty[$;

Montrer que y est bornée et que si $y_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, y est croissante et tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$

Ici, on définit

$$f : \left(\begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,y) & \longmapsto & \dfrac{\cos(y)}{t} \end{array} \right)$$

f est C^1. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (local), il existe une unique solution locale de (1)

$y :]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\to \mathbb{R}$.

On a $|f(t,y_2)-f(t,y_1)| =$

$$\left| \frac{\cos(y_2)}{t} - \frac{\cos(y_1)}{t} \right| \leq \frac{1}{|t|} |y_2-y_1|$$

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. On a

$$|f(t,y_2)-f(t,y_1)| \leq \frac{1}{a}|y_2-y_1|$$

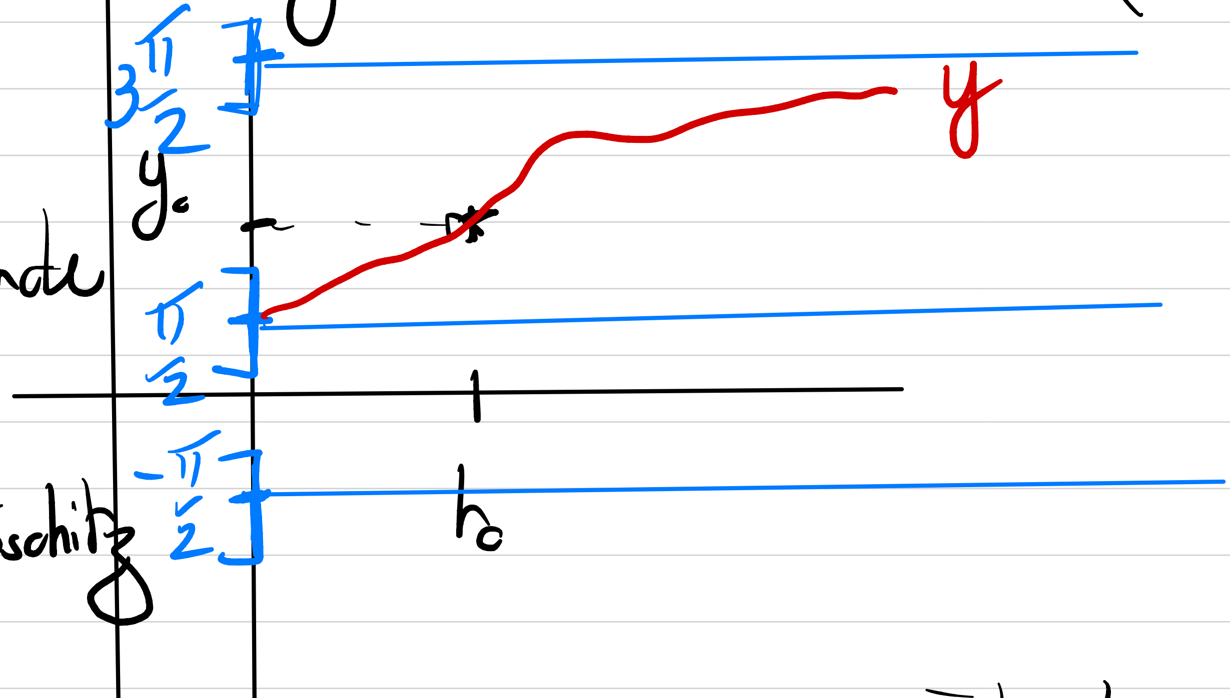
et f est C^0 et globalement Lipschitz par rapport à sa seconde variable sur $[a,b]\times\mathbb{R}$.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz global, il existe une unique solution de (1) $y : [a,b] \to \mathbb{R}$

La solution maximale de (1) est donc bien définie sur $]0,+\infty[$:

$$(1)\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\cos(y(t))}{t} \\ y(t_0) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

* y est bornée :



On remarque que (1) possède des solutions particulières constantes :

$$y(t) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Si $y_0 \in \left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$ alors

$y(t) \in \left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$ car sinon $y(t_1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et cela contredit l'unicité d'une solution maximale.

* On suppose $y_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: on a déjà observé que $y(t) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Reste à montrer que

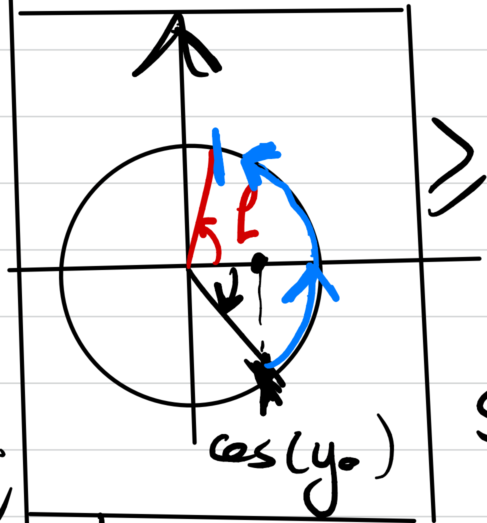
$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{\pi}{2} \quad : \text{ on a}$$

$y'(t) \geq 0$ $\forall t \in]0, +\infty[$ et ainsi y est croissante, majorée par $\frac{\pi}{2}$, d'où

$$\begin{cases} y(t) \to \ell \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y'(t) = \dfrac{\cos(y(t))}{t} \Rightarrow |y'| \to 0 \end{cases}$$

On ne peut conclure à ce stade. On reprend un raisonnement plus précis :

$$y(t) - y(1) = \int_1^t \frac{\cos(y(s))}{s}\, ds$$

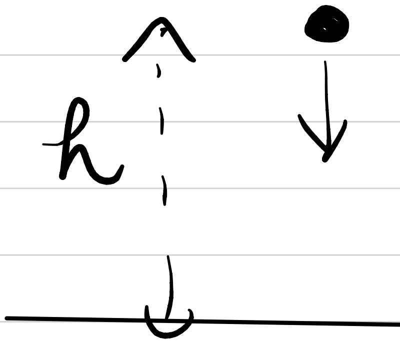


$$\geq \underbrace{\min(\cos(y_0), \cos(\ell))}_{>0\ ?} \ln(t)$$

Si $\cos(\ell) > 0$, on aboutira à $y(t) \to +\infty$, ce qui est absurde. On a bien $\ell = \frac{\pi}{2}$.

Ex4 (un peu de modélisation)

Soit l'ED suivante modélisant la chute d'un objet soumis à la gravité et à une force du frottement :



$$\left\{\begin{array}{l} h(0) = h_0 \\ h'(0) = 0 \\ (2) \quad m h''(t) = -mg + \alpha (h'(t))^2 \\ \quad t \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.$$

Montrer que (2) admet une unique solution locale. En étudiant l'ED vérifiée par $v = h'$, montrer que la solution est définie sur $\mathbb{R}_+$ et que $v \to v_{lim}$ quand $t \to +\infty$

* On réécrit (2) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -g + \frac{\alpha}{m} y_2^2 \end{pmatrix} \quad (2)'$$

Ici $f\left(t, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -g + \frac{\alpha}{m} y_2^2 \end{pmatrix}$ est C^1. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (local), il existe une solution de $(2)'$ (par $h_0 > 0$) unique, définie sur $]0, T^*[$ (intervalle maximal)

* Extension $T^* = +\infty$: l'équation vérifiée par $v = h'$ s'écrit

$$(3)\begin{cases} v(0) = 0 \\ v' = -g + \dfrac{\alpha}{m} v^2 \quad (t>0) \end{cases}$$

On suppose $T^* < +\infty$:

on a $v \in]0, T^*[$. Si on montre que v est prolongeable au delà de T^*, on aboutit à une contradiction car dans ce cas, h est aussi prolongeable :

$$h(t) = h_0 + \int_0^t v(s)\,ds$$

ce qui est absurde.

On remarque que $\lim\limits_{t \to T^*} v(t) < +\infty$

En effet, il existe des solutions particulières de (3) : $v(t) = \pm\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$

Comme $v(0) = 0 \in]-\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}, \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}[$

on a toujours, grâce à l'unicité de Cauchy-Lipschitz

$$v(t) \in \left]-\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}, \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}\right[.$$

$(v' \leq 0$ et $v \to l < 0)$

Par le théorème des bouts appliqué à (3), on a bien $T^* = +\infty$