1

Séance 6 : résolution de systèmes non linéaires

Objectif : résoudre de manière approchée le système de n équations non linéaires à n inconnues :

$$\boxed{\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}}$$

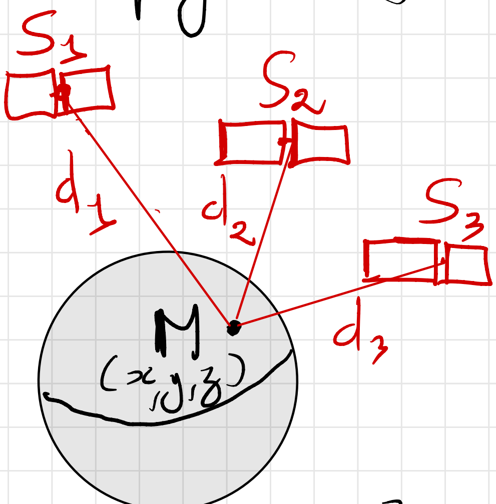
soit $\boxed{f(x) = 0}$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue, voire $C^1, \ldots C^\infty$.

Parfois, on préfère écrire le système à résoudre sous la forme $\boxed{g(x) = x}$ où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Exemples

→ calcul de racines de polynômes ; (dont le polynôme $x^2 - a = 0$ pour le calcul de $\sqrt{a}$)

→ GPS (Global Positionning System) : le calcul de la position d'un point $M(x, y, z)$ peut être obtenu à partir de la connaissance de ses distances à 3 satellites (4 si on prend en compte le décalage d'horloge : voir liens sur page web).



On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$M \mapsto \left(\|M-S_i\|^2 - d_i^2\right)_{1\leq i\leq 3}$$

et on doit trouver M tel que $f(M)=0$ (voir TD/TP, vidéo, ou texte en lien)

Prérequis : calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$, différentielles, formules de Taylor ordre 1 et 2.

Déf : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (ou sur Ω ouvert) et $x\in\mathbb{R}^n$. On dit que f est différentiable en x s'il existe une application linéaire $Df(x)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$:

$$\forall h\in\mathbb{R}^n,\ f(x+h) = f(x) + Df(x).h + o(\|h\|)$$
(quand $\|h\|\to 0$)

On dit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ si elle est différentiable en tout point. (on parle aussi de Jacobien).

→ caractère C^1 (Df C^0), C^2 (Df C^1)

→ Formule de Taylor ordre 2 :

$$f(x+h) = f(x) + Df(x).h + \frac{1}{2}(D^2 f(x).h).h + o(\|h\|^2)$$

1) Méthodes itératives. Théorème de Picard

On a le théorème fondamental suivant :

Théorème : $g : A \to \mathbb{R}^n$ avec A fermé de $\mathbb{R}^n$ avec :

(i) g contractante pour $\| \ \|$: il existe $K \in [0,1[$ tel que $\forall (x,y) \in A^2$, $\|g(x) - g(y)\| \leq K\|x-y\|$

(ii) $g(A) \subset A$ (A stable par g).

Alors, g possède un unique point fixe dans A, noté x^* (c'est à dire que $g(x^*) = x^*$).

De plus la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

est telle que $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x^*$ avec une vitesse géométrique :

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{K^k}{1-K}\|x_1 - x_0\|$$

preuve : on considère la suite (x_k) de l'énoncé (x_0 quelconque), correctement définie. On observe que (x_k) est de Cauchy :

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_\ell\| &\leq \|x_k - x_{k-1}\| + \dots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \quad (k > \ell) \\
&\leq K^{k-1}\|x_1 - x_0\| + \dots + K^{\ell}\|x_1 - x_0\| \\
&\leq K^{\ell}(1 + \dots + K^{k-\ell-1})\|x_1 - x_0\| \\
&\leq \frac{K^\ell}{1-K}\|x_1 - x_0\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \ell \to +\infty
\end{aligned}$$

uniformément en k

Comme A est fermé dans $\mathbb{R}^n$, A est complet et la suite (x_k) converge donc dans A vers x^*.

On a $x_{k+1} = g(x_k)$ implique $x^* = g(x^*)$ (car g continue)

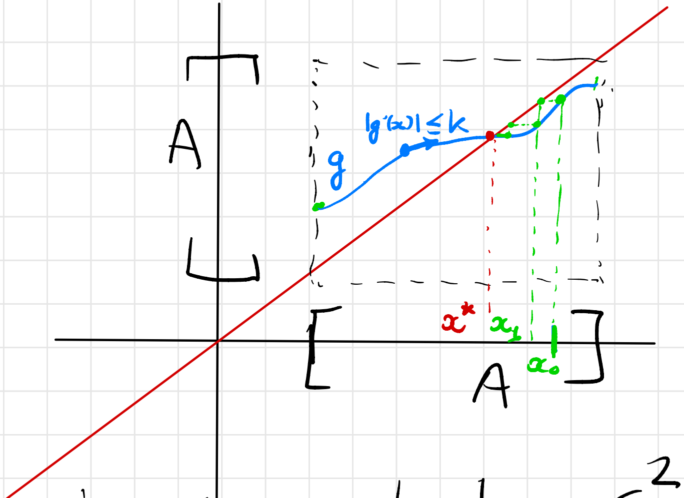
L'unicité de x^* s'obtient aisément par l'absurde.

L'estimation d'erreur s'en déduit également facilement ($k \to +\infty$)

Remarques :

1) vitesse de convergence en K^k satisfaisante dans la plupart des cas.

2) cas particulier si $n = 1$:



3) si on suppose de plus g C^2 et que $Dg(x^*) = 0$, alors la convergence de (x_k) vers x^* est plus rapide :

$$\underbrace{g(x_k)}_{x_{k+1}} = \underbrace{g(x^*)}_{x^*} + 0 + O(\|x_k - x^*\|^2)$$

et $\|x_{k+1} - x^*\| = O(\|x_k - x^*\|^2)$

on parle de convergence quadratique :

(de l'ordre de $C^{(2^k)}$) au lieu de $\tilde{C}^k$, par exemple :

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^8}$, $\frac{1}{2^{16}}$, $\frac{1}{2^{32}}$

au lieu de

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$

2) Méthode de Newton

On utilise le résultat précédent pour construire une méthode de résolution de $f(x) = 0$ à partir de $g(x) = x$ où $Dg(x^*) = 0$

Théorème : soit $f\ A \to \mathbb{R}^n$ avec A ouvert. On suppose f C^2 sur A et qu'il existe $x^* \in A$ tq $f(x^*)=0$. On suppose enfin $Df(x^*) \in GL_n(\mathbb{R})$ ($\rightsquigarrow$ unicité locale)

Alors, il existe V voisinage de x^* tel que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1}.f(x_k) \end{cases}}$$

converge vers x^* de manière quadratique (méthode de Newton-Raphson)

preuve :

Comme $Df(x^*) \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $GL_n(\mathbb{R})$ ouvert, il existe $\tilde{V}$ voisinage de x^* tq $g\begin{pmatrix} \tilde{V} \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto x - Df(x)^{-1}.f(x) \end{pmatrix}$ est bien définie. g est C^1. On a :

$g(x^*) = x^* - Df(x^*).\cancel{f(x^*)} = x^*$ et

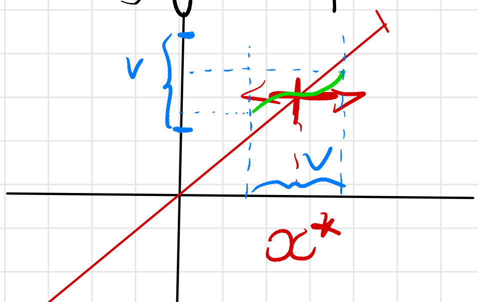
$Dg(x^*) = Id - D(Df(x)^{-1})|_{x^*}.\cancel{f(x^*)}$
$\qquad - Df(x^*)^{-1}.Df(x^*)$
$\qquad = Id - Id = 0$

De plus, on peut restreindre $\tilde{V}$ à V pour avoir g stable et

$$\|Dg(x)\| \leq k < 1.$$

6

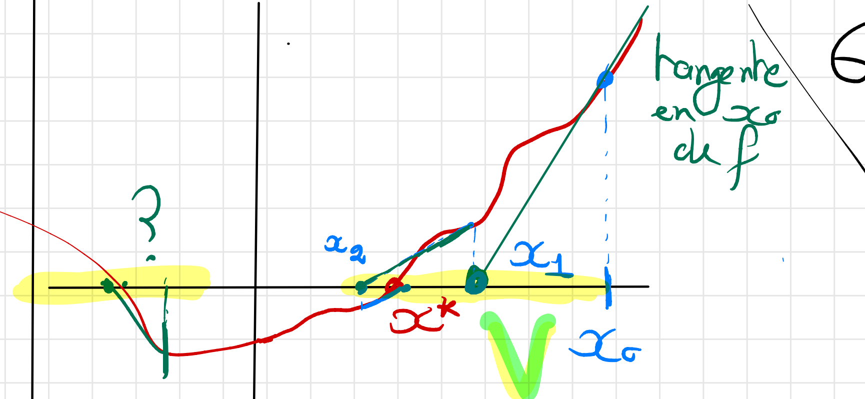
(dans $\mathbb{R}$, graphiquement :



* Cas particulier si $n = 1$: dans ce cas, la méthode s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}}$$

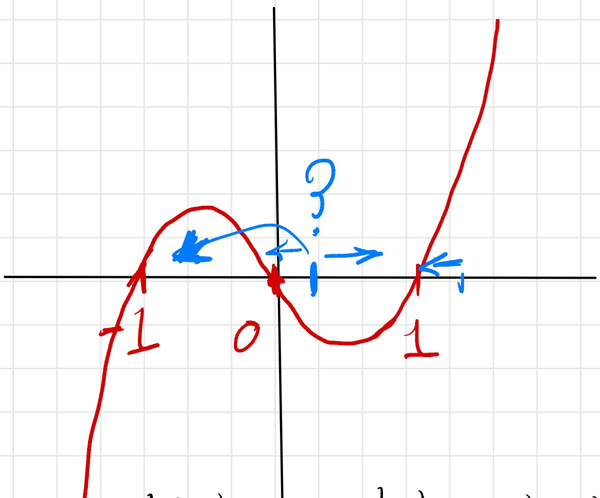
et a une interprétation graphique :



Remarques :

* La convergence est locale (bassin d'attraction V), très rapide.

Par contre, on peut observer une instabilité par rapport à la donnée initiale (chaos, fractales). Par exemple, on peut observer cette instabilité sur le cas simple où $f(x) = x^3 - x$



* Cette méthode permet de rechercher efficacement les racines d'un polynôme (voir poly ou [Demailly]). En particulier, dans le cas de la racine carrée, l'algorithme s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + a/x_k\right) \end{cases}$$

(algorithme phénicien) et converge dès que $x_0 \geq a$ (convergence quadratique).

* Si $f'(x^*) = 0$ et x^* racine isolée, il existe des versions étendues de la méthode de Newton.

* Le coût de la méthode peut être élevé si n grand (résolution d'un système linéaire à chaque itération). Une possibilité pour accélérer la méthode consiste à ne remettre à jour que toutes les N itérations le Jacobien (et utiliser une factorisation LU du Jacobien).

* Exemple et implementation Python :

→ TD4 : l'exemple du GPS.
(voir script Python)

3) Autres méthodes pour $n=1$

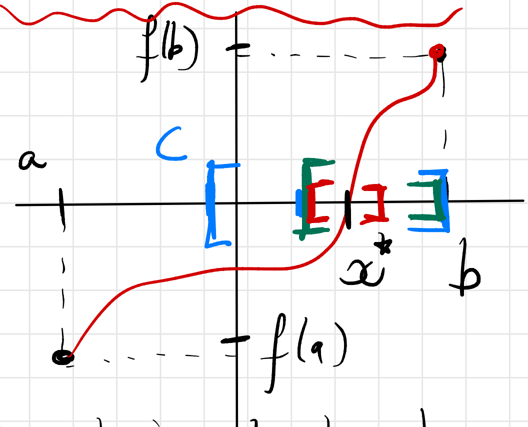
Dans $\mathbb{R}$, il existe d'autres méthodes pour approcher des solutions à l'équation $f(x) = 0$:

- → dichotomie
- → fausse position
- → sécante

géométrique

entre géométrique et quadratique

Méthode de dichotomie :



* f continue, strictement monotone et $f(a)f(b)<0$.

⇝ existence et unicité de x^*.

⇝ $[a_k, b_k]$ emboîtés tq $x^* \in [a_k, b_k]$

$$c = \frac{a_k+b_k}{2}$$

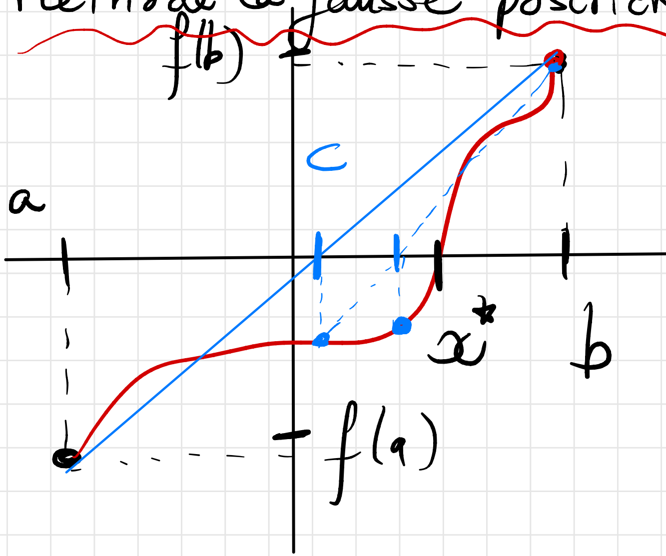
↗ si $f(a_k)f(c)<0$ ⇝ $b_{k+1}=c$

↘ sinon $a_{k+1} = c$

* convergence géométrique en $\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

→ implémentation Python (exo : $f(x) = \cos x - x$ sur $[0,1]$ avec précision ε).

* Méthode la fausse position



Inspiré de la dichotomie, on considère à présent

$$c = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

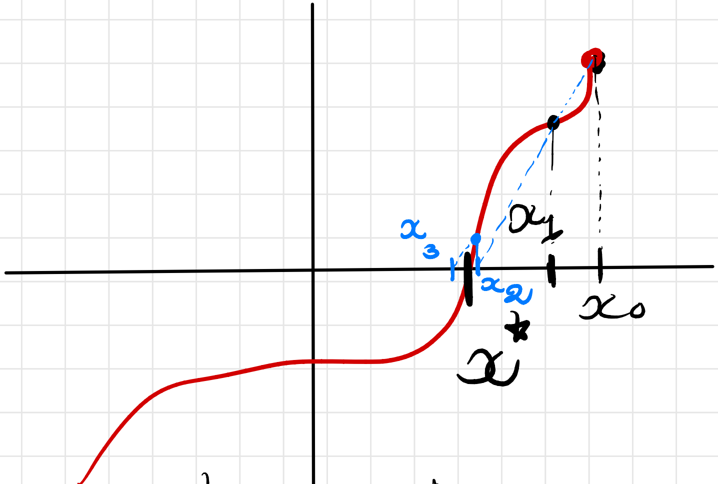
par couper le segment $[a,b]$.

(estimation d'erreur : voir TD4).
(ou poly)

* Méthode de la sécante

Inspirée de Newton, la méthode consiste à approcher $f'(x_k)$ par un taux d'accroissement :

$$p_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$



La suite s'écrit :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

(x_0, x_1 fixés)

On peut montrer que la suite est correctement définie dans un voisinage V de x^* ($f'(x^*) \neq 0$) et converge vers x^* avec une convergence en $\rho\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$

Un souci numérique survient cependant car on divise par un nombre de plus en plus petit. (idées similaires en dimension $n>1$: méthode "quasi Newton").