Séance 8 : Calcul différentiel : exercices et compléments

1) Exercices d'application

(voir feuille TD 5)

Ex 1) 1) Montrer que l'application

$$\mathrm{inv} : \left(\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array}\right) \text{ est}$$

différentiable sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle

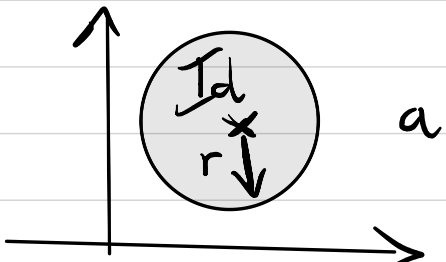
* $GL_n(\mathbb{R})$ ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

→ avec le déterminant : comme

$$\det : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}\right) \text{ est continue,}$$

$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}^*}_{\text{ouvert}})$ est ouvert

→ directement : si $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $|||H||| < \dfrac{1}{|||M^{-1}|||}$



alors $(M+H) \in GL_n(\mathbb{R})$

et

$$(M+H)^{-1} = \left(M(I + \underbrace{M^{-1}H}_{U})\right)^{-1}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (-U)^i\right) M^{-1}$$

En effet, si $|||U||| < 1$, alors

2

$(I-U)$ inversible et

$$(I-U)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} U^i$$

$$\left((I-U)\left(\sum_{i=0}^{N} U^i\right) = I - U^{N+1} \right.$$

et $|||U^{N+1}||| \leq |||U|||^{N+1} \longrightarrow 0$

quand $N \to +\infty$, ainsi que $\sum_{i=0}^{N} U^i$

est absolument convergente donc

convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ complet $)$

* Existence et calcul de $d(inv)(M)$

$\in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

(Remarque : l'existence est assurée par la formule de Cramer mais ne permet pas de calculer la différentielle). Si $|||H||| < \frac{1}{|||M^{-1}|||}$)

$$inv(M+H) = (M+H)^{-1}$$

$$= (I + M^{-1}H)^{-1} M^{-1}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (-M^{-1}H)^i \right) M^{-1}$$

$$= (Id - M^{-1}H + (M^{-1}H)^2 + \dots) M^{-1}$$

$$= M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + \varepsilon(H)$$

où $\varepsilon(H) = \left(\sum_{i=2}^{+\infty} (M^{-1}H)^i \right) M^{-1}$

et

$$|||\varepsilon(H)||| \leq \frac{|||M^{-1}|||\ |||M^{-1}H|||^2}{1 - |||M^{-1}H|||}$$

$$\leq C\ |||H|||^2$$

On en déduit que

$$d(inv)(M)(H) = -M^{-1} H M^{-1}$$

$(d(inv)(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$

Remarque : l'application inv est C^∞ car $d(inv)(H) = -inv \cdot H \cdot inv$ en raisonnant par récurrence (possible aussi avec Cramer).

Ex1) 2) Montrer que l'application

$$\|\ \| : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \|M\| \end{cases}$$

n'est pas différentiable en 0.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ tq

$$\|H\| = 0 + L(H) + o(\|H\|)$$

$(H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

On a :

$$1 = L\left(\frac{H}{\|H\|}\right) + o(1)$$

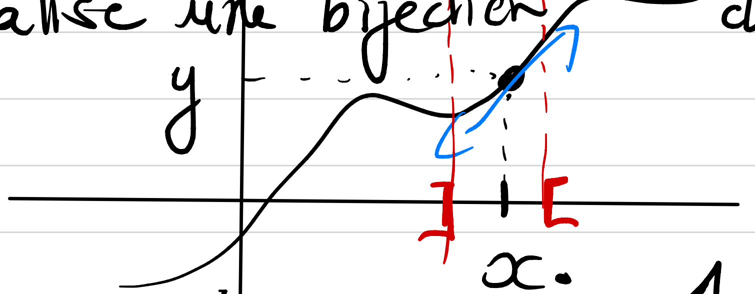
En prenant $H \leftrightarrow tH$ et en faisant tendre t vers 0, on a :

$$1 = L\left(\frac{H}{\|H\|}\right), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

En changeant H en $-H$, on aboutit à une contradiction : $1 = -1$

2) Théorème d'inversion locale

Il s'agit d'étendre le résultat connu sur $\mathbb{R}$: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^1 et $f'(x_0) > 0$, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tq $f'(x) > 0$ si $x \in I$ et f réalise une bijection de I sur $f(I)$



avec $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} > 0$ si $y = f(x)$ (f^{-1} est C^1)

On définit la notion de C^k-difféomorphisme :

Déf : soit $f : U \to V$ où U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$. On dit que f réalise un C^k-difféomorphisme ($k \geq 1$) si

(i) $f \in C^k(U, V)$

(ii) $f : U \to V$ est bijective

(iii) $f^{-1} \in C^k(V, U)$

On peut remarquer (si $k \geq 1$) que :

$$df^{-1}(y) = \left(df(f^{-1}(y))\right)^{-1}$$ en

utilisant la règle de la chaîne à

$$f^{-1} \circ f = Id$$

Le théorème d'inversion locale s'énonce ainsi

Théorème 1 : soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. On suppose qu'il existe $a \in U$ et $df(a) \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe un ouvert $V \subset U$ tq f réalise un C^k difféomorphisme de V sur $W = f(V)$.

On a le corollaire suivant :

Théorème 2 (inversion globale)

soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k. On suppose que f injective et $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ pour tout $x \in U$. Alors f réalise un C^k difféomorphisme de U sur $f(U)$.

La preuve du Th 1 repose sur

- le th. de point fixe de Picard
- le th. des accroissements finis
- l'exercice 1 vu précédemment

preuve du Théorème 1 (inversion locale) :

On se ramène facilement à $a = 0$, $f(a) = 0$ et $df(a) = Id$.

$\rightarrow$ on montre la bijectivité de f sur V ouvert avec le théorème de Picard ;

Comme $df(0) = Id \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $r > 0$ tq pour tout $x \in \overline{B}(0,r)$

$$|||df(x) - Id||| \leq \frac{1}{2} \quad (df \text{ est } C^0)$$

On a $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ (avec l'ex 1)

et $|||df(x)^{-1}||| = |||Id - (Id - df(x))|||$
≤ 2

On note V l'ouvert :

$$V = B(0,r) \cap f^{-1}(B(0, r/2))$$

et on montre que f bijective sur V sur $B(0, r/2)$. Soit $y \in B(0, r/2)$. On définit :

$$h_y : \begin{pmatrix} \overline{B}(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto y + x - f(x) \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ h_y est C^1, $dh_y(x) = Id - df(x)$

Avec le théorème des accroissements finis, on a

$$\|h_y(x') - h_y(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x' - x\|$$

$\rightsquigarrow$ h_y contractante sur $\overline{B}(0,r)$

→ $\bar{B}(0,r)$ stable par h_y :

soit $x \in \bar{B}(0,r)$, on a

$$\|h_y(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\|$$
$$< \frac{r}{2} + \|h_y(x) - h_y(0)\|$$
$$< \frac{r}{2} + \frac{1}{2}(r) = r$$

D'après le théorème de point fixe, il existe un unique $x \in \bar{B}(0,r)$ tq $h_y(x) = x$ soit $y = f(x)$.

De plus, comme $h_y(x) \in B(0,r)$, $x \in B(0,r)$ et $x \in f^{-1}(B(0,\frac{r}{2}))$

soit : $x \in U$

→ on note $g = f^{-1} : W \to V$

on montre que g est Lipschitzienne :

soit $x, x' \in B(0,r)$, on a

$$\|x - x'\| = \|h_0(x) - h_0(x') + f(x) - f(x')\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\|$$

soit $\|x - x'\| \leq 2\|f(x) - f(x')\|$

Avec $x = g(y)$ et, $x' = g(y')$ avec $y, y' \in W$, on a :

$$\|g(y) - g(y')\| \leq 2\|y - y'\|$$

→ on montre que g est C^1 sur W :

soit $y \in W$ et $k \in \mathbb{R}^n$ tq $y+k \in W$

On a $x \in V$ et $x+h \in V$ tq

$f(x) = y$ et $f(x+h) = y+k$

On calcule :

$\Delta(k) = g(y+k) - g(y) - df(x)^{-1}(k)$

$= x+h - x - df(x)^{-1}(f(x+h) - f(x))$

$= df(x)^{-1}(df(x)(h) - f(x+h) + f(x))$

On a donc

$\|\Delta(k)\| \leq \underbrace{|||df(x)^{-1}|||}_{2} . o(\|h\|)$

Or $\|g(y+k) - g(y)\| \leq 2\|k\|$

soit $\|h\| \leq 2\|k\|$

On a donc

$$\frac{\|\Delta(k)\|}{\|k\|} \leq 2 . \frac{1}{2\|h\|} \quad o(\|h\|) \longrightarrow 0 \text{ quand } \|k\| \to 0$$

On a bien g différentiable sur W

et $dg(y) = (df(x))^{-1}$

$= df(f^{-1}(y))^{-1}$

(a $dg = \underset{C^\infty}{\mathrm{inv}}(\underset{C^0}{df} \circ \underset{C^0}{f^{-1}})$)

dg est C^0, ce qui implique g C^1.

$\rightarrow$ si $k \geq 2$, on procède comme précédemment avec $dg = \mathrm{inv}(df \circ f^{-1})$

preuve du théorème 2 (inversion globale)

Grâce au théorème d'inversion locale, pour tout $x \in U$, il existe un ouvert U_x tq $f : U_x \to V_x$, C^k difféomorphisme. On a

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x \quad \text{On a}$$

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} f(U_x) = \bigcup_{x \in U} V_x$$

ouvert

$\rightarrow f(U)$ ouvert.

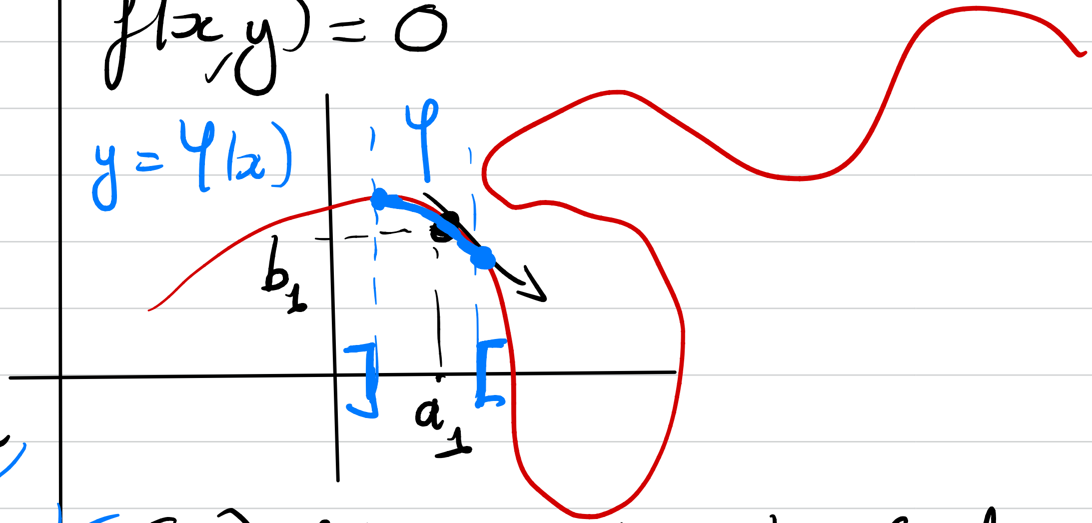
Ainsi $f : U \to f(U)$ est bijective

De plus, f^{-1}/V_x est $C^k \Rightarrow f^{-1}$ est C^k sur $f(U)$

3) Théorème des fonctions implicites

Sur le cas d'une courbe définie de manière implicite sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 0$$



Si $\partial_y f(a_1, a_2) \neq 0$, alors localement, la courbe se confond avec une fonction du type $y = \varphi(x)$. et

$$\varphi'(a_1) = -\frac{\partial_x f(a_1,a_2)}{\partial_y f(a_1,a_2)}$$

De manière générale, on va considérer $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, C^1 et on note, si $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $df_{x_2}(a_1, a_2)$ la différentielle de l'application partielle :

$$f \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \\ x_2 \mapsto f(a_1, x_2) \end{array} \right)$$

en a_2 ($df_{x_2}(a_1, a_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$).

On a :

$$df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = df_{x_1}(a_1, a_2)(h_1) + df_{x_2}(a_1, a_2)(h_2)$$

Le théorème s'énonce ainsi :

Théorème 3 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$, ouverts, et $f : U \times V \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k ($k \geq 1$). Soit $(a_1, a_2) \in U \times V$. On suppose que $df_{x_2}(a_1, a_2) \in GL_m(\mathbb{R})$.
Alors, il existe $U' \subset U$, $V' \subset V$, ouverts, contenant a_1 et a_2 resp., et $\varphi : U' \to V'$ C^k tq

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2) = 0 \\ (x_1, x_2) \in U' \times V' \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x_1 \in U' \\ x_2 = \varphi(x_1) \end{array}\right.$$

De plus,

$$d\varphi(x_1) = -\Big(\underbrace{d f_{x_2}(x_1, \varphi(x_1))}_{\in GL_m(\mathbb{R})}\Big)^{-1} \circ \underbrace{d f_{x_1}(x_1, \varphi(x_1))}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$$

$d\varphi(x_1) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

preuve : elle repose sur le théorème d'inversion locale appliqué à

$$F \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1, f(x_1, x_2)) \end{array} \right)$$

(si $g = F^{-1}$, $\varphi(x_1) = g(x_1, 0)$)

le calcul de $d\varphi(x_1)$ s'effectue avec la règle de la chaîne.

Retour aux exercices du TD 5 :

Ex 4 | $f(x) = \sin(\|x\|^2)$ — norme euclidienne

Déterminer les extrema locaux de f :

→ f différentiable, gradient ?

→ f C^2, Hessienne ?

→ extrema locaux ?

On remarque :

$f(x) \in [-1, 1]$

$$\begin{cases} \text{si } \|x\|^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & \leadsto \text{maximum global} \\ \text{si } \|x\|^2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, & \leadsto \text{min. globaux} \end{cases}$$

Par les théorèmes de composition, f est C^1 et $df(x)(h) = \cos(\|x\|^2)\langle 2x, h\rangle$

$\rightarrow \quad \nabla f(x) = 2x\cos(\|x\|^2)$

si x^* extremum local, $\nabla f(x^*) = 0$

soit : $x = 0$ ou $\cos(\|x\|^2) = 0$

soit $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

* On a par les théorèmes généraux que f est C^2 et

$$Hf(x) = 2\cos(\|x\|^2) I + 2x(-\sin(\|x\|^2)) 2 x^r$$

$$= 2\cos(\|x\|^2) I - 4\sin(\|x\|^2) x x^r$$

(cas produit scalaire usuel) $\quad$ ($\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

* Si $x = 0$

$Hf(0) = 2I \gg 0$

$\rightarrow$ CS2 : $x^* = 0$ minimum local

* si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$Hf(x) = -4 x x^r$ s.d.n

(on a besoin de $f \leq 1$ par conclure)