

Séance 9 : résolution de systèmes linéaires : méthodes itératives

Objectif : on cherche à résoudre numériquement un système linéaire de Cramer : $Ax = b$ (avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$), en construisant une suite d'approximations de celui-ci, notée $(x_k)_k \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$.

On va utiliser pour cela une méthode itérative de type point fixe de Picard :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

1) Normes sur $M_n(\mathbb{R})$ et rayon spectral

Id, $M_n(\mathbb{R}) \cong \text{evn}$ de dimension n^2 .

On peut munir $M_n(\mathbb{R})$ de différentes normes (voir exemples dans TD6).

Certaines normes peuvent avoir des propriétés supplémentaires :

* norme d'algèbre : $\|\cdot\|$ vérifie :

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

+ norme subordonnée : en considérant une norme N quelconque sur $\mathbb{R}^n$, on définit :

la norme subordonnée à N , notée $\|\cdot\|_N$:

$$\|A\|_N = \sup \left\{ \frac{N(Ax)}{N(x)}, x \neq 0 \right\}$$

On constate que toute norme subordonnée est aussi une norme d'algèbre. On

remarque aussi qu'on a toujours $\|Id\| = 1$

Exemples: si $A = [a_{ij}]$,

$$\|A\|_1 = \sum_j \sum_i |a_{ij}|, \|A\|_2, \dots, \|A\|_\infty$$

$$\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$$

Deux de ces normes subordonnées ont une expression explicite:

Proposition: on a

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

preuve: exercice (à poly)

La norme subordonnée $\|\cdot\|_2$ n'a pas d'expression explicite mais s'exprime en fonction du rayon spectral de A :

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A) \}$$

On a alors

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} \quad (\text{exercice})$$

$$(\|A\| = \lambda_n \text{ si } A \in S_n^{+*}(\mathbb{R}))$$

Il existe enfin une relation entre toute norme subordonnée et le rayon spectral :

Proposition : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a

$$\rho(A) \leq \|A\|. \text{ Inversement,}$$

si $\varepsilon > 0$ et A fixé, il existe une norme subordonnée, $\|\cdot\|_\eta$

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

preuve : * si $|\lambda| = \rho(A)$ et λ 3

x vecteur propre associé,

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| = \rho(A)$$

* (voir poly ou références usuelles Ciorlet / Allaire / ...)

Ces résultats permettent d'étudier plus facilement la convergence de certaines suites de matrices,

du type $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$A^k \xrightarrow[k]{} 0 \iff \rho(A) < 1$$

$\iff$ il existe $\|\cdot\|$, telle que $\|A\| < 1$

Exemple d'exercice : Ex1, TD6

1) axiomes à vérifier ou $M_n(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{n^2}$

2) $\|Id\|_1 = n \neq 1$: non subordonnée

3) Vrai car

$$N(AB) = \sum_i \sum_j \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|$$

et

$$N(A)N(B) = \left(\sum_i \sum_k |a_{ik}| \right) \cdot \left(\sum_k \sum_j |b_{kj}| \right)$$

Soit :

$$N(AB) \stackrel{(IT)}{\leq} \sum_i \sum_j \sum_k |a_{ik}| |b_{kj}|$$

tandis que

$$N(A)N(B) = \sum_i \sum_k \sum_j \sum_{k'} |a_{ik}| |b_{k'j}|$$
$$\geq \sum_i \sum_j \sum_{k=k'} |a_{ik}| |b_{kj}|$$

2) Principe général des méthodes itératives

On va utiliser une décomposition

de A de la forme :

$$A = M - N$$

où M est une matrice "facile à inverser" (triangulaire : remontée) en n^2 opérations

et de considérer la suite d'itérations :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b) \end{cases} \quad (1)$$

(si $x_k \rightarrow x^*$, $Mx^* = Nx^* + b$, soit $Ax = b$)

On a le résultat fondamental suivant :

Théorème : la méthode itérative

(1) basée sur la décomposition (M, N)

de A converge pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vers

la solution x^* de $Ax = b$ si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$

preuve : * si $\rho(M^{-1}N) < 1$ 5

alors, avec le §1, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ tq

$\|M^{-1}N\| < 1$. Alors, pour la norme $\|\cdot\|$ associée sur $\mathbb{R}^n$, on

constante que

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto M^{-1}(Nx + b) \end{cases}$$

satisfait les conditions du th. de

Picard, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|M^{-1}N\| \|x - y\|$$

(et la convergence est géométrique)

En notant $e_k = x_k - x^*$, on

$$a \begin{cases} x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b) \\ x^* = M^{-1}(Nx^* + b) \end{cases}$$

soit : $e_{k+1} = M^{-1}N e_k$ et $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$

* si $\rho(M^{-1}N) \geq 1$, si on

suppose que la méthode est convergente,

alors on aurait $\forall e_0 \in \mathbb{R}^n$

$(M^{-1}N)^k e_0 \rightarrow 0$, cela implique

que $\rho(M^{-1}N) < 1$: absurde //

Il existe un cas particulier simplifié :

Théorème : si $A \gg 0$, on

a toujours $tM + N$ symétrique.

La condition $tM + N \gg 0$ 6

est suffisante pour assurer la convergence de la méthode.

preuve * $tA = A$

$$\Downarrow \\ t(tM + N) = tM + N$$

(le reste est à voir sur poly ou référence usuelle).

3) Méthodes de Jacobi et

Gauss Seidel

3.1) Méthode de Jacobi

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cette méthode consiste à écrire :

$$A = M - N \text{ avec } \begin{cases} M = \text{diag}(A) = D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \\ N = M - A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 1 \\ -a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On note

$$J = M^{-1}N.$$

Pour que la méthode soit bien définie, il faut $a_{ii} \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Dans ce cas, la méthode s'écrit :
si $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$, on a

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{a_{ii}} \left(-a_{i1} x_k^1 - \dots - a_{i,i-1} x_k^{i-1} - a_{i,i+1} x_k^{i+1} - \dots - a_{in} x_k^n \right)$$

$$(1 \leq i \leq n)$$

Cette méthode converge ssi $\rho(J) < 1$.

Si $A \gg 0$, la méthode existe et elle

converge si $2D - A \gg 0$.

3.2) Méthode de Gauss-Seidel

Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on peut la décomposer en 3 parties :

$$A = \begin{pmatrix} \text{triangulaire supérieure stricte} & \text{diagonale} & \text{triangulaire inférieure stricte} \\ & D & -E \\ -F & & \end{pmatrix}$$

telle que : $A = D - E - F$

La méthode de Gauss Seidel consiste à écrire $A = M - N$ avec

$$M = D - E$$

$$N = F$$

On note $\mathcal{L}_1 = M^{-1}N = (D - E)^{-1}F$

Gauss-Seidel définie si $a_{ii} \neq 0 \forall i$ 8
Dans ce cas, la méthode s'écrit :

$$\text{si } x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n), \text{ on a}$$

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{a_{ii}} \left(-a_{i,1}^{k+1} x_{k+1}^1 - \dots - a_{i,i-1}^{k+1} x_{k+1}^{i-1} - a_{i,i+1}^k x_k^{i+1} - \dots - a_{i,n}^k x_k^n + b_i \right)$$

$$(1 \leq i \leq n)$$

Cette méthode converge ssi $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$
Si $A \gg 0$, la méthode existe et elle converge si $\mathcal{L}_1(D - E) + F = D - E + F = D \gg 0$, ce qui est toujours le cas //

Dans certains cas particuliers, il est possible de comparer Jacobi et Gauss Seidel :

Proposition : si A est tridiagonale, on a $\rho(R_1) = \rho(J)^2$ (mêmes convergences et G.S. plus rapide dans ce cas).

preuve : poly de cours ou références usuelles.

A l'inverse, il existe des situations favorables à Jacobi par rapport à Gauss Seidel (voir TD 6)

9
Implémentation Python de Jacobi et Gauss Seidel, et application sur l'exemple de la matrice du Laplacien discrétisé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \gg 0$$

A, b, x_0 , critères d'arrêt : N ou ϵ (si solution exacte connue) + (éventuellement) max vitesse convergence //

(voir exemple corrigé en ligne)

4) Autres méthodes itératives

4.1) Méthode de relaxation (SOR)

Il s'agit d'une généralisation de Gauss Seidel :

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1}{\omega} D - E \\ N &= \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) D + F \end{aligned} \right\}$$

avec $\omega > 0$ (relaxation)

Le cas $\omega = 1$ correspond à Gauss-Seidel

On peut montrer :

* on a nécessairement $\omega \in]0, 2[$ par que la méthode converge.

* si $A \gg 0$, la méthode SOR converge par tout $\omega \in]0, 2[$. 10

* si $A \gg 0$ et tridiagonale, il existe un paramètre optimal

$$\omega_{pr} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}} > 1$$

par lequel la vitesse est maximale

(géométrie de raison $\omega_{pr} - 1$)
(références : Giarlet)

4.2) Méthode du gradient

Il s'agit de la méthode associée à la décomposition :

$$\begin{cases} M = \frac{1}{\lambda} \text{Id} & (\lambda \in \mathbb{R}^*) \\ N = M - A = \frac{1}{\lambda} \text{Id} - A \end{cases}$$

Une itération s'écrit :

$$x_{k+1} = x_k - \lambda (Ax_k - b)$$

On montre que :

si $A \gg 0$, la méthode converge si $\lambda \in]0, \frac{2}{\rho(A)}[$

Il existe une valeur optimale ¹¹ de λ égale à $\lambda_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

(exercice TD 6)

Remarque : cette méthode correspond à un principe de minimisation de la fonction $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ par la méthode du gradient