Séance 23 : sujet d'entraînement

PARTIE 1 : existence et unicité des solutions de (1)

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème :

$$\begin{cases} -v_\lambda''(x) + c(x)v_\lambda(x) = f(x), & x \in [0,1], \\ v_\lambda(0) = 0, \\ v_\lambda'(0) = \lambda, \end{cases} \tag{1bis}$$

admet une unique solution $v_\lambda \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, v_λ peut s'exprimer sous la forme :

$$v_\lambda = \lambda w_1 + w_2$$

avec $w_1 \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ l'unique solution du système :

$$\begin{cases} -w_1''(x) + c(x)w_1(x) = 0, & x \in [0,1], \\ w_1(0) = 0, \\ w_1'(0) = 1, \end{cases}$$

et w_2 une fonction indépendante de λ à caractériser.

3. Montrer que $w_1(1) \neq 0$.

4. En déduire qu'il existe au moins une solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ du problème (1). Montrer que cette solution est unique.

5. Montrer que si f est positive, alors u est également positive.

PARTIE 2 : une matrice de discrétisation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A_n la matrice carrée de taille n, constante par diagonale :

1

Q1) (on donne seulement les mots clés)

* ED linéaire second ordre avec conditions initiales de Cauchy
* c et f fonctions continues
* Th. de Cauchy Lipschitz linéaire global

Q2) On prend ω_2 telle que

$$\boxed{\begin{cases} -\omega_2'' + c\,\omega_2 = f \\ \omega_2(0) = 0 \\ \omega_2'(0) = 0 \end{cases}}$$

(on l'obtient par C.N.).

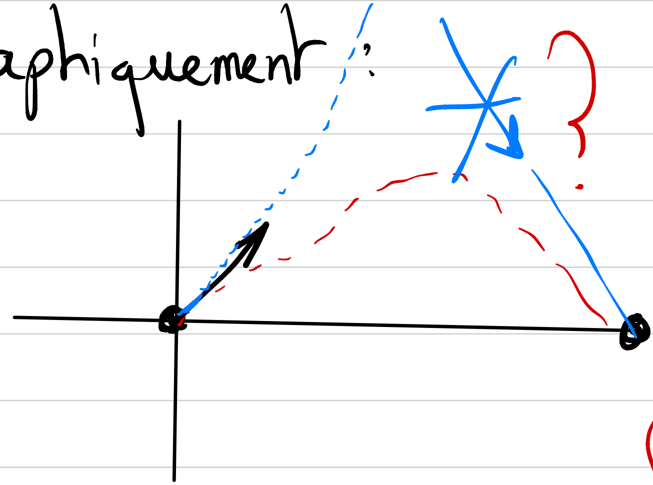
On a bien $v_\lambda = \lambda\omega_1 + \omega_2$ par unicité

Q3) Raisonnement par l'absurde

$\omega_1(1) = 0$. On a de plus

$$\begin{cases} -\omega_1'' + c(x)\,\omega_1 = 0 \\ \omega_1(0) = 0 \\ \omega_1'(0) = 1 \end{cases}$$

Graphiquement :

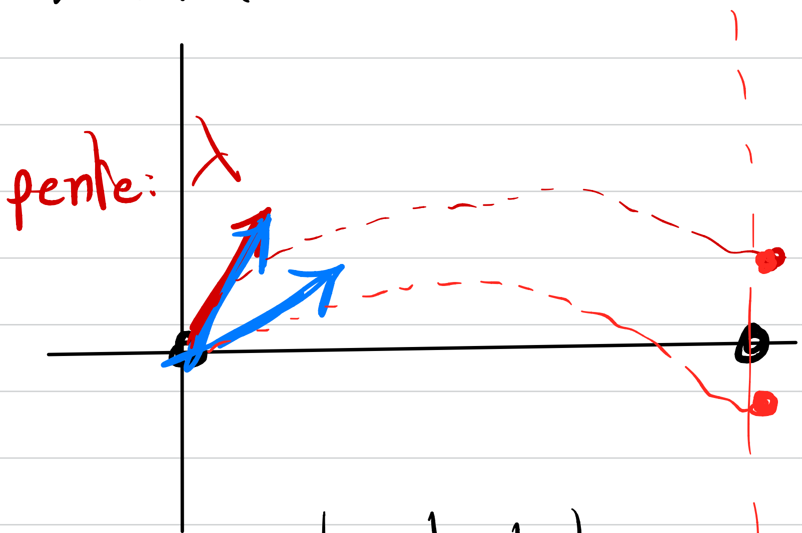


$\omega_1'' = c\,\omega_1 \geq 0$

si $\omega_1 > 0$
$\omega_1'' \geq 0$

(idée graphique valorisée)

Q4) Il s'agit de la méthode de tir



on prend λ tel que

$$v_\lambda(1) = \lambda\,\omega_1(1) + \omega_2(1) = 0$$

soit : $\boxed{\lambda = -\dfrac{\omega_2(1)}{\omega_1(1)}}$ $(\neq 0)$

Pour l'unicité, on prend

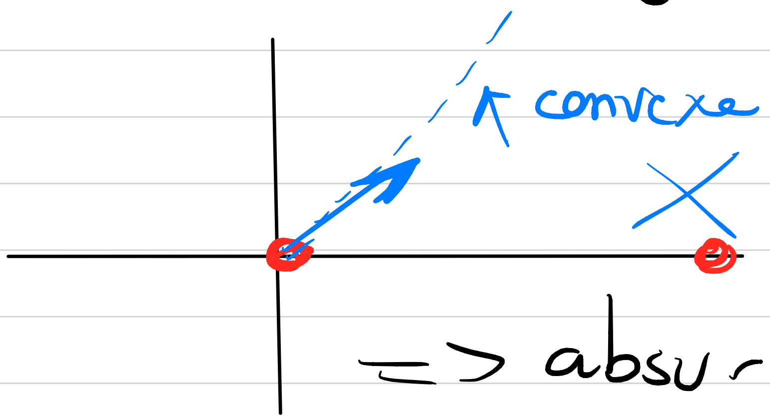
3

u et $\tilde{u}$ solutions de (1)

On a $w = u - \tilde{u}$ solution de
$$\begin{cases} -w'' + cw = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

Si $w'(0) = 0 \Rightarrow$ C.L donne $w = 0$

Sinon $w'(0) \neq 0$ et on est ramené au cas de Q3

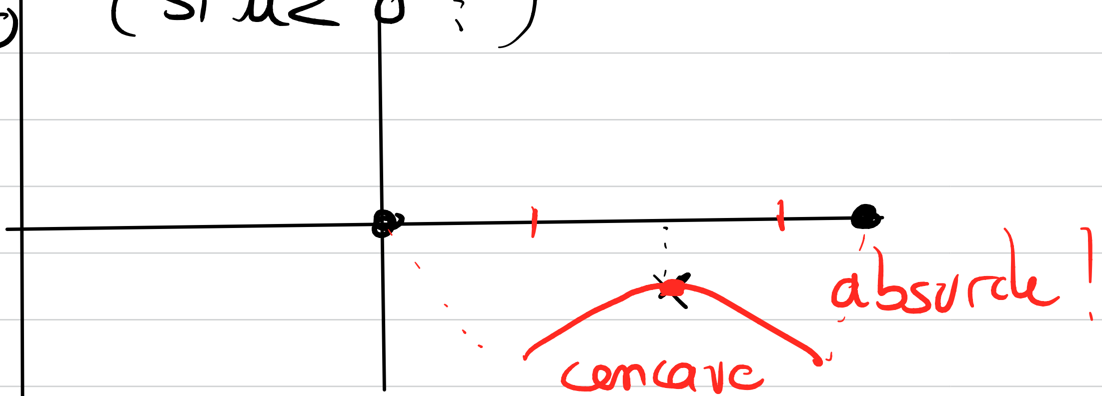


$\Rightarrow$ absurde //

Q5) question avec un raisonnement similaire à Q3 :

$$u'' = \underbrace{cu}_{\leq 0}^{\geq 0} - \underbrace{f}_{\geq 0}$$

(si $u < 0$:)



Remarque : le problème se rencontre dans de nombreuses modélisations : corde à l'équilibre, on parle de problème aux limites.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A_n la matrice carrée de taille n, constante par diagonale :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Soit $V = {}^t(v_1, ..., v_n)$ un vecteur propre de A_n associé à une valeur propre complexe λ. Montrer que λ est nécessairement réelle et que les composantes v_i de V vérifient la relation :

$$v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$.

7. Montrer que toute valeur propre de A_n est dans l'intervalle $]0, 4[$.

8. Soit λ une valeur propre de A_n.
a) Montrer que les racines complexes r_1 et r_2 du polynôme

$$P(r) = r^2 - (2-\lambda)r + 1$$

sont distinctes et conjuguées.
b) On pose $r_1 = \bar{r}_2 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n+1)\theta) = 0$ et $\rho = 1$.

9. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A_n ainsi qu'une base de vecteurs propres.

10. On considère la famille des matrices $B = [b_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (appelées M-matrices) :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \begin{cases} b_{i,i} > 0 \\ b_{i,j} \leq 0 \quad \text{pour tout } j \neq i \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} > 0 \end{cases}$$

Montrer que si B est une M-matrice, alors on a :
a) B est inversible,
b) si $F = {}^t(f_1, ..., f_n)$ a des coordonnées toutes positives, alors $B^{-1}F$ aussi,
c) tous les coefficients de B^{-1} sont positifs.

11. En appliquant les résultats précédents à $A_n + \epsilon I_n$ avec $\epsilon > 0$, montrer que tous les coefficients de A_n^{-1} sont positifs.

Q6 à Q9 : calcul des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice du laplacien discrétisé A.

Q7 : disques de Gershgörin :

$$Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset [0, 4]$$

Q9 On trouve

$$\boxed{\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}$$

$(k \in \{1, \dots, n\})$

et un vecteur propre associé :

$$v_k^i = \sin\left(i\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

Q10 a) Matrice à diagonale strictement dominante, donc inversible.

10 b) on note $U = B^{-1}F$

On a $BU = F$ soit

$$\begin{cases} \underbrace{b_{11}}_{>0} u_1 + \dots + \underbrace{b_{1n}}_{<0} u_n = \underbrace{f_1}_{\geq 0} \\ \vdots \\ \underbrace{b_{n1}}_{<0} u_1 + \dots + \underbrace{b_{nn}}_{>0} u_n = \underbrace{f_n}_{\geq 0} \end{cases}$$

Par l'absurde, on suppose $u_{i_0} < 0$ (et le minimum des u_i)

On a alors :

$$f_{i_0} = \underbrace{b_{i_0,1}}\,\underbrace{u_1} + \dots + b_{i_0,i_0} u_{i_0} + \dots + b_{i_0,n} u_n$$

$$\leq b_{i_0,1} u_{i_0} + \dots " + b_{i_0,n} u_{i_0}$$

$$= \underbrace{u_{i_0}}_{<0} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0,j} \right)}_{>0}$$

ce qui est absurde.

10 c) On prend $F_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$\Rightarrow B^{-1}F_i = i^{\text{ème}}$ colonne de B^{-1} //

10 d) on applique Q10c) à $A_n + \varepsilon I_d$ et on invoque la continuité

de $M \mapsto M^{-1}$ (Cramer plus déterminant polynomial en les coefficients de M) par en déduire que les coefficients de A_n^{-1} sont tous positifs.

PARTIE 3 : une suite d''approximations de la solution de (1)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $h = \dfrac{1}{n+1}$ et on considère les réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ définis par $x_i = ih$ pour tout $i \in \{0, ..., n+1\}$.

12. Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$, il existe une constante $C \geq 0$, indépendante de n, telle que

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \ |v''(x_i) - \frac{1}{h^2}(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i))| \leq Ch^2$$

P2

13. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + c(x_i)u_i = f(x_i), & \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ u_0 = u_{n+1} = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

14. On suppose (dans cette question seulement) que $c(x) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. On note u la solution exacte du problème (1). Montrer que pour tout $i \in \{0, ..., n+1\}$, on a

$$u_i = u(x_i) = \frac{1}{2}x_i(1 - x_i)$$

15. Montrer que si f est positive, alors $u_i \geq 0$ pour tout $i \in \{0, ..., n+1\}$.

Q12 : approximation d'une dérivée seconde à l'ordre 2

$$u''(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2}$$

TL. ordre 4 :

$$\begin{cases} u(x_{i+1}) = u(x_i) + \dots + \dfrac{h^4}{4!} u^{(4)}(\xi_1) \\ u(x_{i-1}) = u(x_i) + \dots + \dfrac{h^4}{4!} u^{(4)}(\xi_2) \end{cases}$$

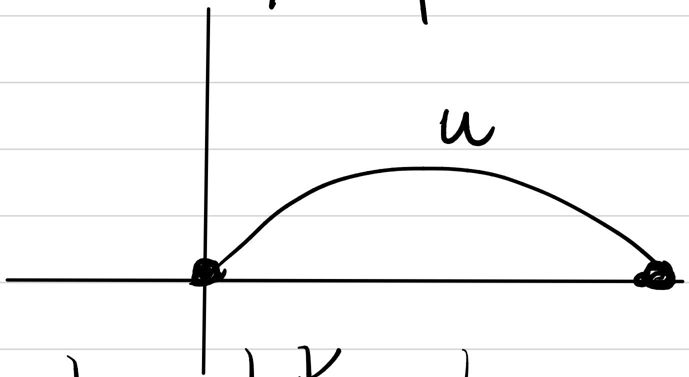
Q13 On écrit (2) sous forme matricielle :

$$\underbrace{\frac{1}{h^2} A_n}_{SDP} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}}_{\geq 0} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Q14) $c \equiv 0$, $f \equiv 1$

$\rightsquigarrow u_i = u(x_i)$

On remarque que $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$



est solution de

$$\left.\begin{array}{l} -u'' + 0.u \equiv 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}\right\}$$

et de plus, par cette fonction

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2}$$

Q15) si $f \geq 0$, alors $u_i \geq 0$

On applique à la matrice

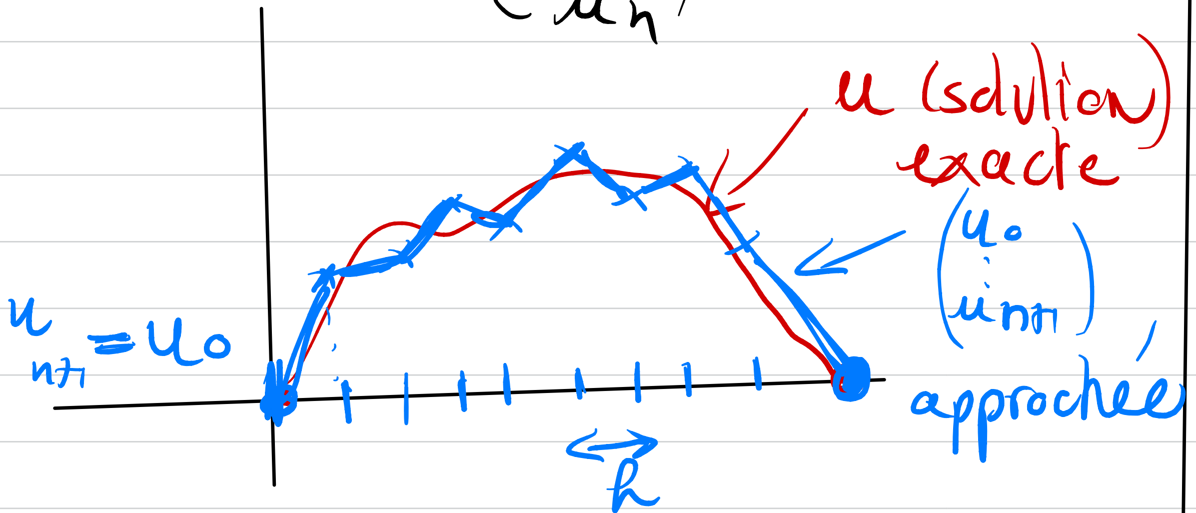
$$\frac{1}{h^2}A_n + \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$$

le résultat de la partie 2 (Q11) pour assurer que

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{h^2}A_n + \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

est à coefficients positifs.

Remarque : à ce stade, on a construit un procédé d'approximation de la solution exacte u de (1) à l'aide de $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ solution de (2)



PARTIE 4 : un premier résultat de convergence

Dans toute cette partie, on supposera de plus que $c \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ et que $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ (c est toujours positive également).

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par la relation :

$$N(A) = \sup\{||Ax||_\infty, \quad ||x||_\infty \leq 1\}$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$, alors

$$N(A) = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} (\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|)$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) En utilisant les résultats des questions 14 et 15, montrer que pour la matrice A_n définie au début de la partie 2, on a :

$$N\left(((n+1)^2 A_n)^{-1}\right) \leq \frac{1}{8}$$

b) En déduire que pour toute matrice diagonale $D_n = [d_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $d_{i,i} \geq 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a également

$$N\left(((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1}\right) \leq \frac{1}{8}$$

18. Soit u l'unique solution du problème (1) et $(u_i)_{0\leq i\leq n+1}$ la famille définie par la relation (2) pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une constante $\tilde{C} > 0$, indépendante de n, telle que

$$\max_{0\leq i\leq n+1} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{\tilde{C}}{n^2}$$

Indication : on pourra introduire le vecteur $X = {}^t(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ où on a posé $\epsilon_i = u(x_i) - u_i$ et calculer $A_n X$.

Q16) $|||A|||_\infty = \sup_i \left(\sum_j |A_{ij}|\right)$ (classique)

Q17) a) Soit $M = h^2 A_n^{-1}$

Tous les coefficients de M sont positifs (Q11). Ainsi)

$|||M|||_\infty$ est atteint par

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Or, si

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = Mf$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{h^2} A_n \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec Q 14, on a

$$u_i = \frac{1}{2} x_i (1 - x_i)$$

D'où $\|Mf\|_\infty \leq \frac{1}{8}$

$$\Longrightarrow |||M|||_\infty \leq \frac{1}{8}$$

17 b) On utilise le principe suivant : si u solution de

$$\begin{cases} -u'' + 0 = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

et $\tilde{u}$ solution de

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' + c\tilde{u} = f \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0 \end{cases}$$

alors $u \leq \tilde{u}$ et on raisonne comme précédemment

18) "consistance + stabilité $\Rightarrow$ convergence"

On a

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

et

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i}{h^2}\right) + c_i u_i = f_i \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$\Longrightarrow$

$$-\frac{1}{h^2}\left(\frac{u(x_{i+1})+u(x_{i-1})-2u(x_i)}{h^2}\right) + c_i u(x_i) = f(x_i) - \delta_i \Longleftarrow \text{erreur consistance}$$

où

$$\delta_i = \frac{u(x_{i+1})+u(x_{i-1})-2u(x_i)}{h^2} - u''(x_i)$$

Or, $\left\| \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq C h^2$ (consistance)

$\Longrightarrow$ en notant $U = \begin{pmatrix} u_1 - u(x_1) \\ \vdots \\ u_n - u(x_n) \end{pmatrix}$

On a

$$\left(\frac{1}{h^2}A_n + \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}\right) U = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow U = \left(\frac{1}{h^2}A_n + D_n\right)^{-1} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ (stabilité)

$$\|\omega\|_\infty \leq \frac{1}{8} C h^2$$

Remarque : on a montré la convergence du schéma approché (2) vers la solution exacte (1), avec une erreur en $O(h^2)$, uniformément. (schéma d'ordre 2).