Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2024/2025
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD/TP n^{o}1 : algèbre linéaire

Exercice 1.

On dit que la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $b_{i,j}$ est une M-matrice si elle vérifie les conditions suivantes:

- $\forall i \in \{1, .., n\}, \quad b_{i,i} > 0$
- $\forall (i, j) \in \{1, .., n\} \times \{1, .., n\}, \quad b_{i,j} \leq 0$ si $i \neq j$.
- $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} > 0$

1. Montrer que B est inversible
2. soit $F \in \mathbb{R}^n$ ayant toutes ses composantes positives ou nulles. Montrer qu'il en est de même pour le vecteur $V = B^{-1}F$.
3. En déduire que l'inverse d'une M-matrice a tous ses coefficients positifs ou nuls.
4. Montrer que ce résultat est conservé si on remplace la dernière condition par
   - B inversible et $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \geq 0$

Exercice 2.

1. Soit $\alpha_i, i = 1 \dots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant les égalités:
$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

2. Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathbb{R}_3[X], i = 1 \dots 4$ vérifiant les relations (1), avec respectivement:
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1).$$

3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question 1. avec:
$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1).$$
Montrer que pour chaque point $x \in]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in]0,1[$ tel que:
$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2.$$

4. On approxime l'intégrale d'une fonction f à l'aide de la formule de quadrature
$$\int_0^1 f(x)dx \sim \int_0^1 p_f(x)dx.$$
Calculer explicitement $\displaystyle\int_0^1 p_f(x)dx$ en fonction de f et montrer que cette formule est exacte pour toutes les fonctions polynômiales de $\mathbb{R}_3[X]$.

5. Majorer l'erreur commise en remplaçant $\int_0^1 f(x)dx$ par $\int_0^1 p_f(x)dx$ dans le cas où $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$.

Exercice 3. Supposons que les nombres soient représentés en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs et que le résultat des opérations est arrondi à 3 chiffres significatifs. Soit le système linéaire $Ax = b$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme premier pivot 10^{-4}.

2. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme ligne pivot à la première étape, la deuxième ligne.

3. Conclure.

Exercice 4.

Implémenter avec le langage de votre choix la méthode de Gauss pour la résolution d'un système linéaire cramérien $Ax = b$, avec ou sans stratégie de pivôt

1. Avec une matrice de taille $n = 100$ aléatoire, déterminer le temps de résolution d'un système quelconque. En déduire une estimation du nombre d'opérations par secondes effectuées par votre ordinateur.

2. Sur l'exemple de la matrice de Hilbert, montrer que la résolution d'un système mal conditionné peut conduire à des résultats très dégradés.

3. Sur l'exemple de la matrice de l'exercice 1, montrer que la résolution d'un système simple et bien conditionné peut conduire à des résultats très dégradés en l'absence de stratégie de pivot.