

TD n°2 : calcul différentiel

Exercice 1.

- i) Calculer la différentielle de l'application de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = M^{-1}$.
- ii) Montrer qu'une norme sur \mathbb{R}^n n'est pas différentiable en 0.
- iii) La norme $\|\cdot\|_1$ est-elle différentiable en dehors de 0 ?

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$, et la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par

$$g(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$.

- i) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x, y)| \leq C(x^2 + y^2)$$

et

$$|g(x, y)| \leq C(x^2 + y^2)$$

- ii) En déduire que f et g sont deux fonctions différentiables sur \mathbb{R}^2 . On distinguera le cas du point $(0, 0)$ des autres points de \mathbb{R}^2 .
- iii) La fonction f (respectivement g) est-elle C^1 en $(0, 0)$?

Exercice 3 On considère dans tout cet exercice une fonction f définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

- i) On suppose que f est C^1 sur \mathbb{R}^n et que toutes ses dérivées partielles sont bornées par $M \geq 0$ sur \mathbb{R}^n . Montrer que pour tous x et y dans \mathbb{R}^n , on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M\sqrt{n}\|x - y\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

- ii) On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que f est continue en 0 et que toutes ses fonctions dérivées partielles tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. Montrer que f est différentiable en 0.
- iii) On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que toutes ses dérivées partielles sont bornées par $M \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que f est continument prolongeable à \mathbb{R}^n si et seulement si $n \geq 2$. Dans ce cas, f est-elle nécessairement différentiable en 0 ?

Exercice 4.

On considère la fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sin(\|x\|^2) = \sin\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

1. Montrer que la fonction f est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculer son gradient.
2. Montrer que la fonction f est C^2 et calculer sa matrice Hessienne.
3. Déterminer tous les extrema (minima et maxima) de f sur \mathbb{R}^n . Représenter graphiquement ces extrema dans le cas où $n = 2$.