Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2024/2025
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n°3 : méthodes numériques de résolution de systèmes linéaires, directes ou itératives

Exercice 1.

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU que l'on déterminera.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée $n \times n$ dont toutes les sous-matrices diagonales sont inversibles.

1. Montrer qu'il existe

   - une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité (*i.e.* $L_{i,i} = 1$),
   - une matrice triangulaire supérieure S à diagonale unité,
   - une matrice diagonale D

   telles que
   $$A = LDS. \tag{1}$$

2. Montrer que cette décomposition est unique.

3. Montrer que si A est symétrique, la décomposition (1) devient :
   $$A = LDL^T.$$

4. Retrouver la décomposition de Cholesky dans le cas où la matrice A est symétrique définie positive.

5. Montrer que si la matrice A est symétrique mais pas définie positive, on peut factoriser A sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T,$$

où B est une matrice triangulaire inférieure et $\tilde{B}$ une matrice dont chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de B, soit égale à cette colonne changée de signe.

6. Appliquer cette factorisation à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Le but de l'exercice est de montrer que si A a une structure bande c'est-à-dire si il existe $p \in \{0, .., n-1\}$ tel que $A_{i,j} = 0$ pour tout i, j tel que $|i - j| > p$ alors il en est de même pour L et U.

Remarque: A est nulle en dehors des $2p + 1$ diagonales centrales et A a la forme suivante:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \text{---} & a_{1,p+1} & & 0 & \cdots & 0 \\ | & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ a_{p+1,1} & & \ddots & & \ddots & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & & \ddots & & a_{n-p,n} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & | \\ 0 & \cdots & 0 & & a_{n-p,n} & \text{---} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On fixe l'indice k tel que $k \geq p + 2$, alors A vérifie A_{kj} et A_{jk} sont nuls pour j compris entre 1 et $k - (p + 1)$.

1. Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ ligne de L, on a : $L_{kj} = 0$ pour $1 \leq j \leq k - (p + 1)$.

2. Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ colonne de U, on a $U_{jk} = 0$ pour $1 \leq j \leq k-(p+1)$.

Exercice 4. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Cholesky que l'on déterminera.

Exercice 5.

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On note $H(v) \in$ la matrice (dite de Householder)

$$H(v) = I_n - \frac{2}{||v||^2} v^t v$$

et $\mathcal{H}$ l'ensemble de telles matrices complété par la matrice I_n.

1. Montrer que $H(v) \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ (matrices orthogonales et symétriques).

2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $||x|| = ||y||$. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $Hx = y$.

3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ produit d'au plus $(n-1)$ matrices de $\mathcal{H}$ tel que $PA = R$ soit triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Préciser la construction de P et R.

4. Proposer un algorithme basé sur les matrices de Householder donnant une factorisation $A = QR$, avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire, en $\frac{4}{3}n^3 + O(n^2)$ opérations élémentaires (additions, multiplications, divisions ou racines carrées).

Exercice 6. On définit l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad N(A) \ = \ \sum_{i,j} |A_{i,j}|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. La norme N est-elle une norme subordonnée?

3. La norme N est-elle une norme matricielle (c'est à dire telle que $N(AB) \leq N(A)N(B)$)?

Exercice 7. <u>Norme matricielle et rayon spectral</u> Soit $N(A) = \max_{i,j} |A_{ij}|$.

1. Est-ce une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\rho(A) > N(A)$ (on rappelle que $\rho(A)$ est égal au maximum des modules des valeurs propres complexes de A)
3. La norme N est-elle une norme subordonnée?

Exercice 8. <u>Norme de Frobenius ou norme de Schur</u>

(A) (a) Dans l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ l'espace des matrices antisymétriques. Montrer

$$\mathcal{S}_n \quad \oplus \quad \mathcal{A}_n \quad = \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(b) Montrer que l'application $< .,. >$ définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad < A, B > \quad = \quad \mathrm{tr}((^tA)B),$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour ce produit scalaire

$$\mathcal{S}_n \quad = \quad (\mathcal{A}_n)^{\perp}.$$

(B) On définit

$$|||A|||_s \;=\; \sqrt{\mathrm{tr}(^tA \cdot A)}.$$

(a) Montrer que

$$|||A|||_s \;=\; \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}.$$

(b) Montrer que $|||\cdot|||_s$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on l'appelle norme de Schur).

(c) Montrer que $|||\cdot|||_s$ n'est pas une norme subordonnée à une norme vectorielle.

(d) Montrer que $|||\cdot|||_s$ est une norme matricielle.

(e) Montrer que $\rho(A) \leq \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}$.

(f) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||A|||_2 \leq |||A|||_s \leq \sqrt{n}|||A|||_2$.

Exercice 9.

Implémenter la méthode de Jacobi et Gauss Seidel avec le langage de votre choix et montrer que les deux méthodes convergent sur le cas de la matrice du Laplacien discrétisé. Comparer les deux vitesses de convergence.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle définie positive ?
2) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
3) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
2) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 12. Méthode du gradient à pas constant Soient A une matrice carrée d'ordre n, inversible, dont toutes les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) sont réelles et b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. On désigne par x la solution du système linéaire $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^n$ est donné et par $\lambda_1, .., \lambda_n$ les valeurs propres de A.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$(I) \quad \begin{cases} x^0\text{donné}, & x^{(k+1)} = x^k - \alpha r_k \\ \text{où } r_k = A(x^{(k)}) - b \end{cases} \tag{2}$$

1) Déterminer la matrice $B_\alpha \in \mathbb{R}^{n,n}$ et le vecteur c tels que

$$x^{(k+1)} = B_\alpha x^{(k)} + c$$

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la méthode (I) converge, en fonction des $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$.
3) Montrer que si les valeurs propres de A ne sont pas de même signe, la méthode ne converge pas.
4) On suppose dans la suite de l'exercice que toutes les valeurs propres de A sont positives.

a) Montrer que la méthode converge si et seulement si $0 < \alpha < C$ où C est à déterminer en fonction des valeurs propres de A.

b) On pose $f_i : \alpha \in \mathbb{R}^+ \to f_i(\alpha) = |1-\alpha\lambda_i|$. Représenter graphiquement les courbes des $f_1, .., f_n$ sur une même figure.

c) En déduire le paramètre α optimal, noté α_{opt}, pour lequel la méthode converge la plus vite.

d) On suppose que A est symétrique. Calculer alors, $\rho(B_{\alpha_{\text{opt}}})$, en fonction de $k_2(A)$ (conditionnement de la matrice A pour la norme $\||\cdot\||_2$). Que dire de la méthode si la matrice A est mal conditionnée ?